

**ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АНАЛИЗА РАВНОМЕРНО И НОРМАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН ДЛЯ ЗАДАЧ ГЛУБИННОГО ОБУЧЕНИЯ****А.А.Шерстнева****SOFTWARE IMPLEMENTATION OF THE ANALYSIS OF UNIFORMLY AND NORMALLY DISTRIBUTED RANDOM VARIABLES FOR DEEP LEARNING TASKS****A.A.Sherstneva***Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А.Бонч-Бруевича,  
shers7neva@gmail.com*

С целью получения обоснованных практических результатов исследования инфокоммуникационных систем и сетей связи, а также их последующего применения для решения задач глубинного обучения в статье рассматривается программная реализация задачи анализа равномерно и нормально распределенных случайных величин. Наряду с теоретическим анализом в статье представлены результаты проведенных экспериментальных исследований. Рассматривается равномерное и нормальное распределение. Приведено решение задачи преобразования случайной выборки так, чтобы она подчинялась стандартному нормальному распределению. Сгенерированы последовательности случайных величин. Последовательности были просуммированы поэлементно. Решена задача вычисления функции плотности, среднего значения и дисперсии суммы двух равномерно распределенных случайных величин. Выполнено преобразование равномерного распределения в нормальное распределение. Для двух независимых и одинаково равномерно распределенных случайных величин найдена двумерная функция плотности. Программная реализация выполнена с помощью программы математического моделирования Matlab. Результаты теоретических исследований и программной реализации показаны на графиках.

**Ключевые слова:** *инфокоммуникационные системы, сеть связи, теория телетрафика, равномерное распределение, нормальное распределение, функция плотности вероятности*

**Для цитирования:** Шерстнева А.А. Программная реализация анализа равномерно и нормально распределенных случайных величин для задач глубинного обучения // Вестник НовГУ. Сер.: Технические науки. 2022. №3(128). С.70–74. DOI: [https://doi.org/10.34680/2076-8052.2022.3\(128\).70-74](https://doi.org/10.34680/2076-8052.2022.3(128).70-74)

In order to obtain reasonable practical results of the study of infocommunication systems and communication networks, as well as to put them into practice when solving deep learning problems, the article considers the software implementation of the task of analyzing uniformly and normally distributed random variables. Along with a theoretical analysis, the article presents experimental study results. Uniform and normal distributions are considered. A solution to the problem of transforming a random sample so that it obeys the standard normal distribution is given. The software generates sequences of random variables, which are summed element by element. The problem of calculating the density function, the mean value, and the variance of the sum of two uniformly distributed random variables has been solved. The transformation of a uniform distribution into a normal distribution has been performed. For two independent and uniformly distributed random variables, a two-dimensional density function has been defined. The software implementation has been performed using the Matlab mathematical modeling program. The results of theoretical studies and software implementation are shown in graphs.

**Keywords:** *information and communication systems, communication network, teletraffic engineering, uniform distribution, normal distribution, probability density function*

**For citation:** Sherstneva A.A. Software implementation of the analysis of uniformly and normally distributed random variables for deep learning tasks // Vestnik NovSU. Issue: Engineering Sciences. 2022. №3(128). P.70–74. DOI: [https://doi.org/10.34680/2076-8052.2022.3\(128\).70-74](https://doi.org/10.34680/2076-8052.2022.3(128).70-74)

**Введение**

При исследовании функционирования инфокоммуникационных систем и сетей связи внимание уделяется вопросам расчета численных характеристик процессов обслуживания клиентских запросов. Основной задачей инфокоммуникационных систем и сетей связи является задача распределения и обработки информации. Собственно, и сами инфокоммуникационные системы, и сети связи являются системами распределения информации. При анализе их функционирования составляют математические

модели, которые соответствуют практической сетевой реализации. Но при этом для получения результатов, максимально приближенных к реальной сетевой ситуации, необходимо учитывать не только особенности топологической структуры инфокоммуникационных систем и сетей связи, но и характеристики обслуживаемого трафика. Одной из основных характеристик трафика является закон распределения информационных потоков [1,2]. Однако клиентские запросы, которые порождают трафик, относятся к случайным величинам, формирующим случайную последовательность.

Случайная последовательность в контексте данной работы представляется случайным процессом и, таким образом, анализируется с учетом закона ее распределения. В статье принято нормальное распределение случайной последовательности. Вычисляются основные параметры для одномерного и двумерного нормального распределения.

Анализ одномерного распределения [3] позволяет вычислять параметры, характеризующие работу инфокоммуникационных систем и сетей связи, с целью получения практических рекомендаций по их проектированию и эксплуатации, а также для последующего использования при глубинном обучении. Однако для обоснованных рекомендаций необходимо проводить сравнение параметров соответствующих одномерных распределений. Для проведения сравнения используется двумерное распределение [4], которое рассматривается как частный случай многомерного распределения.

Для решения прикладных задач функционирования инфокоммуникационных систем и сетей связи часто используют равномерное распределение, поскольку его применение позволяет упростить алгоритм решения задач анализа, доведя его до получения приемлемого использования на практике. Однако определенный интерес представляет и нормальное распределение. В статье рассматривается задача преобразования равномерного распределения в нормальное.

Наряду с теоретическим анализом в работе представлены результаты проведенных экспериментальных исследований и выведены иллюстрирующие их графики. Также выполнено сравнение теоретических результатов с экспериментальными и сделаны соответствующие выводы.

### Постановка задачи

Равномерно распределенная случайная величина  $X$  на интервале  $[a, b]$  может быть преобразована в случайную величину  $Y$ , которая равномерно распределена на интервале  $[-0,5; 0,5]$ . Для этого необходимо решить систему линейных уравнений [5,6]:

$$-\frac{1}{2} = \alpha\alpha + \beta;$$

$$\frac{1}{2} = \alpha\alpha + \beta.$$

Решая систему уравнений, получаем:

$$-1 = \alpha(a - b).$$

Следовательно,

$$\alpha = \frac{1}{(b-a)};$$

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{(b-a)}a + \beta.$$

Далее:

$$\beta = -\frac{a+b}{2(a-b)}.$$

Функция преобразования и ее инверсия:

$$g(X) = Y = \frac{1}{(b-a)}X + \frac{a+b}{2(a+b)};$$

$$g^{-1}(Y) = X = (b-a)Y + \frac{a+b}{2}.$$

Поскольку  $g(X)$  является строгой монотонной возрастающей функцией, можно вычислить функцию плотности  $Y$  следующим образом:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \frac{d(g^{-1}(y))}{dy};$$

$$\frac{d(g^{-1}(y))}{dy} = (b-a).$$

И для плотности распределения  $X$ :

$$f_X(x) = 1_{[a,b]}(x) \frac{1}{(b-a)}.$$

В результате:

$$f_Y(y) = f_X A(b-a) = 1_{[a,b]} A,$$

$$\text{где } A = \left( (b-a)y + \frac{a+b}{2} \right).$$

Границы вычислений функции  $Y$  тогда:

$$a \leq (b-a)y + \frac{a+b}{2} \leq b,$$

$$\text{если } y \in \left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right].$$

Теперь можно изменить границы функции плотности распределения вероятности:

$$f_Y(y) = 1_{[a,b]} \left( (b-a)y + \frac{a+b}{2} \right) = 1_{\left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]}(y).$$

Нормально распределенная случайная величина  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  может быть преобразована таким образом, что случайная величина  $Y \sim N(0, 1)$  также будет иметь нормальное распределение [7]. Поэтому мы используем линейное отображение  $X$ :

$$g(X) = Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \Rightarrow g^{-1}(Y) = X = Y\sigma + \mu.$$

Функция плотности распределения тогда:

$$f_Y(Y) = f_X(g^{-1}(Y)) \frac{d(g^{-1}(Y))}{dY}.$$

Далее, пользуясь правилом преобразования для монотонной возрастающей функции, функцию плотности распределения  $Y$  можно рассчитать, как:

$$\frac{d(g^{-1}(Y))}{dY} = \sigma.$$

И с учетом функции плотности нормально распределенной случайной величины  $X$  получаем выражение для  $Y$ :

$$f_X(x) = B \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\};$$

$$f_Y(y) = B \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{C}{\sigma} \right)^2 \right\} \sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} y^2 \right\}$$

$$\text{где } B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}; \quad C = (y\sigma + \mu) - \mu.$$

Соответственно,  $Y \sim N(0, 1)$ .

Целью работы является решение задачи преобразования случайной выборки так, чтобы она подчинялась стандартному нормальному распределению. В статье сгенерированы две равномерно и нормально распределенные случайные последовательности на интервале  $[0, 1]$  длиной 1000. Затем последовательности суммируются поэлементно. Необходимо вычислить параметры суммарной функции: среднего значения и дисперсии при помощи программы математического моделирования.

## Теоретические исследования

### А. Сумма случайных величин

Задача состоит в вычислении функции плотности вероятности, среднего значения и дисперсии суммы двух равномерно распределенных случайных величин  $X \sim R([0, 1])$  и  $Y \sim R([0, 1])$ .

Новая случайная величина  $Z = X + Y$ .

Вследствие свойства линейности математического ожидания определится как:

$$E(Z) = E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

Поскольку  $X$  и  $Y$  имеют одинаковый закон распределения, то  $E(X) = E(Y)$ :

$$E(Z) = 2E(X) = 2 \int_0^1 x dx = 2 \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = 1.$$

Для определения дисперсии:

$$V_{ar}(z) = E(Z^2) - E(Z)^2;$$

$$E(Z^2) = E((X + Y)^2) = 2E(X^2) + 2E(X)^2;$$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Математическое ожидание для  $Z^2$  имеет следующий вид:

$$E(Z^2) = 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \left( \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{7}{6},$$

что определяет дисперсию как:

$$V_{ar}(Z) = \frac{7}{6} - 1^2 = \frac{1}{6}.$$

Плотность распределения определяется как двумерная плотность распределения:

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, z-x) dx.$$

Для независимых случайных величин может быть разложена двумерная плотность:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y).$$

И тогда:

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} 1_{[0,1]}(x) 1_{[0,1]}(z-x) dx.$$

Двумерная плотность определяется как интеграл свертки. В этом случае вычисляется свертка двух прямоугольников (1 на интервале  $[0, 1]$ ), который является треугольником со смещением вправо:

$$\Rightarrow f_z(z) = \begin{cases} -|z-1|+1 & 0 \leq z \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

### В. Преобразование равномерного распределения в нормальное распределение

Две независимые и одинаково равномерно распределенные случайные величины  $X_1 \sim R([0, 1])$  и  $X_2 \sim R([0, 1])$  отображаются как

$$g_1(X_1, X_2) = Y_1 = \sqrt{-2 \ln(X_1)} \sin(2\pi X_2);$$

$$g_2(X_1, X_2) = Y_2 = \sqrt{-2 \ln(X_1)} \cos(2\pi X_2).$$

Инверсия  $g_2^{-1}(Y_1, Y_2) = X_2$  тогда:

$$\left( \frac{Y_1}{Y_2} \right)^2 = \frac{\sin^2(2\pi X_2)}{\cos^2(2\pi X_2)} = \tan^2(2\pi X_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_2^{-1}(Y_1, Y_2) = X_2 = \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\left| \frac{Y_1}{Y_2} \right| \right).$$

Теперь можно вычислить обратную функцию  $g_2^{-1}(Y_1, Y_2) = X_1$ , используя  $g_1(X_1, X_2)$ :

$$g_1(X_1, X_2) = Y_1 = \sqrt{-2 \ln(X_1)} \sin\left(\arctan\left(\left| \frac{Y_1}{Y_2} \right| \right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{-2 \ln(X_1)} = \frac{Y_1}{\sin\left(\arctan\left(\left| \frac{Y_1}{Y_2} \right| \right)\right)};$$

$$-2 \ln(X_1) = Y_1^2 \frac{\left( \left| \frac{Y_1}{Y_2} \right|^2 + 1 \right)}{\left| \frac{Y_1}{Y_2} \right|^2} = Y_1^2 + Y_2^2,$$

$$\text{если } Y_1, Y_2 \in R \Rightarrow g_1^{-1}(Y_1, Y_2) = X_1 = e^{-\frac{Y_1^2 + Y_2^2}{2}}.$$

С помощью двух обратных функций вычисляем двумерную функцию плотности  $Y_1$  и  $Y_2$ :

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = f_{XY}(g_1^{-1}(y_1, y_2), g_2^{-1}(y_1, y_2)) \left| \det \tilde{J}(y_1, y_2) \right|,$$

где  $J(y_1, y_2)$  — определитель Якоби обратных функций:

$$\det \tilde{J}(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{y_1^2 + y_2^2}{2}}.$$

Для случая двумерной функции плотности равномерно распределенных случайных величин:

$$f_{XY}(g_1^{-1}(y_1, y_2), g_2^{-1}(y_1, y_2)) = f_X(g_1^{-1}(y_1, y_2)) f_Y(g_2^{-1}(y_1, y_2)),$$

$$f_X(g_1^{-1}(y_1, y_2)) = 1_{[0,1]} \left( \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\left| \frac{y_1}{y_2} \right| \right) \right),$$

$$f_Y(g_2^{-1}(y_1, y_2)) = 1_{[0,1]} \left( e^{-\frac{y_1^2 + y_2^2}{2}} \right),$$

можно изменить верхнюю и нижнюю границы интервала  $[0, 1]$  функции индикатора, т.к.

$$0 \leq \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\left| \frac{y_1}{y_2} \right| \right) < \frac{1}{4} \quad \forall y_1, y_2 \in R \Rightarrow$$

$$0 < e^{-\frac{y_1^2 + y_2^2}{2}} \leq 1 \quad \forall y_1, y_2 \in R$$

$$\Rightarrow f_X(g_1^{-1}(y_1, y_2), g_2^{-1}(y_1, y_2)) = 1_{\forall y_1, y_2 \in R}.$$

Теперь выразим двумерную функцию плотности  $Y_1, Y_2$ :

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{y_1^2 + y_2^2}{2}} \quad \forall y_1, y_2 \in R.$$

В результате получили стандартную нормальную двумерную функцию плотности независимых случайных величин  $Y_1 \sim N(0, 1)$  и  $Y_2 \sim N(0, 1)$ .

### Результаты экспериментов

Задача состоит в преобразовании случайной выборки так, чтобы она подчинялась стандартному нормальному распределению. Равномерно распределенная случайная последовательность  $x$  (где  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ,

$n = 1000$ ) может быть преобразована в нормальное распределение с использованием правила преобразования случайной величины:

$$\begin{aligned} g(X) = Y &= \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \\ \Rightarrow f_Y(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}y^2\right\} \\ \Rightarrow \mu_Y &= 0 \\ \Rightarrow \sigma_Y^2 &= 1. \end{aligned}$$

Преобразованная случайная последовательность будет иметь вид:

$$y = \frac{x\hat{\mu}}{\sqrt{\hat{\sigma}_X^2}}.$$

$$\text{Математическое ожидание: } \hat{\mu}_X = \frac{1}{n} \sum_i x_i.$$

$$\text{Дисперсия: } \hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum_i (x_i - \hat{\mu}_X)^2.$$

Программная реализация выполнена с помощью программы математического моделирования Matlab. График плотности вероятности распределения последовательности  $Y$  приведен на рис. 1.

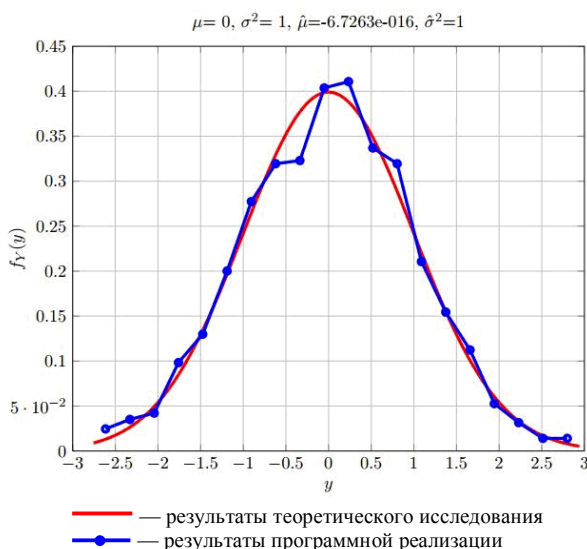


Рис.1. Функция плотности вероятности распределения последовательности  $Y$

Плотность вероятности распределения случайной последовательности оценивается с помощью функции «плотность»

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \sum_i n_i \Delta x = 1 \Rightarrow \hat{n}_i = \frac{n_i}{\Delta x n_i}.$$

Расчетное математическое ожидание и дисперсия отображаются в заголовке каждого графика плотности вероятности распределения.

Согласно графику плотности вероятности распределения (рис.1), преобразованная выходная последовательность  $Y$  является нормально распределенной.

Следующей задачей стала генерация двух равномерно распределенных случайных последователь-

ности на интервале  $[0,1]$  длиной 1000. Затем последовательности были просуммированы поэлементно. Были вычислены параметры математического ожидания и дисперсия суммы.

Две равномерно распределенные последовательности  $x$  и  $y$  на интервале  $[0, 1]$  образуют новую последовательность  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ ,  $n = 1000$ ,  $z = x + y$ .

Новая последовательность  $z$  является выборкой случайной величины  $Z$  с плотностью распределения [7–10]:

$$\Rightarrow f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} 1_{[0,1]}(x) 1_{[0,1]}(z-x) = \begin{cases} -|z-1|+1 & 0 \leq z \leq 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mu_z = 1$$

$$\Rightarrow \sigma_z^2 = \frac{1}{6}.$$

Функция плотности вероятности распределения суммы случайных величин показана на рис.2, согласно которому преобразованная сумма случайных величин представляет собой кривую в форме треугольника, состоящую из свертки двух плотностей вероятностей равномерно распределенных последовательностей.

Далее решается задача преобразования равномерного распределения случайных величин в нормальное.

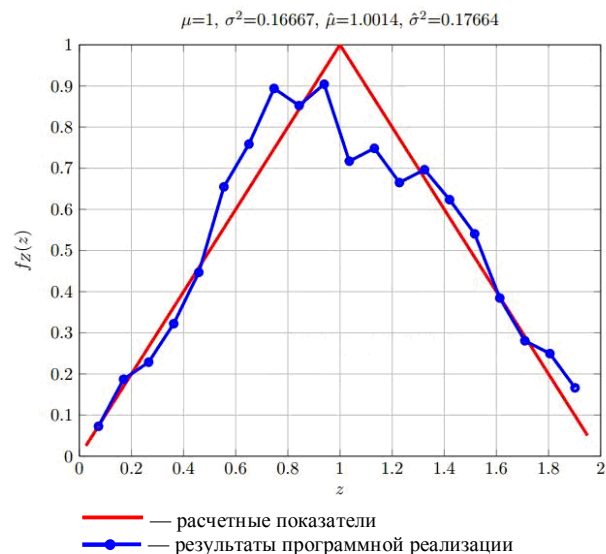


Рис.2. Функция плотности вероятности распределения суммы случайных величин

Независимые равномерно распределенные случайные последовательности  $x_1$  и  $x_2$  ( $x_1 = (x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,n})^T$ ,  $x_2 = (x_{2,1}, x_{2,2}, \dots, x_{2,n})^T$ ,  $n = 1000$ ) на интервале  $[0, 1]$  образуют новую последовательность  $y_1$ :

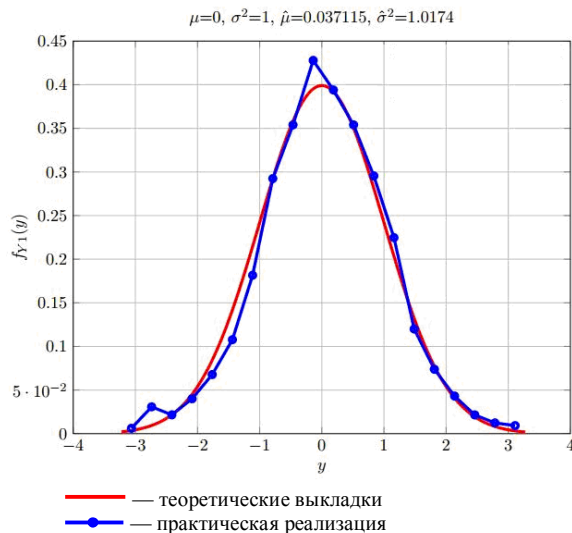
$$g_1(x_1, x_2) = y_1 = \sqrt{-2 \ln(x_1) \sin(2\pi x_2)};$$

$$f_{Y_1}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}y^2\right\}$$

$$\Rightarrow \mu_{Y_1} = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_{Y_1}^2 = 1.$$

Результаты решения показаны на рис.3.

Рис.3. Плотность распределения последовательности  $y_1$ 

Плотность распределения последовательности  $y_1$  подчиняется нормальному закону распределения.

### Заключение

Процессы функционирования телекоммуникационных сетей и систем связи сопровождаются целым рядом появления случайных величин, характеризующих производительность сети. Вероятность появления этих случайных величин заранее предсказать невозможно, но можно определить наиболее значимые из них, исходя из целей проводимых исследований. В зависимости от функции распределения значимых случайных величин применяются те или иные расчетные формулы оценки эффективности сети. При составлении математических моделей функционирования телекоммуникационных сетей и систем чаще всего допускается экспоненциальное распределение случайных величин для того, чтобы в дальнейшем выполнить расчет эффективности по известным формулам. Но такое допущение не всегда соответствует действительности. Поэтому первоначально желательно вычислить функцию распределения исследуемых случайных величин, а уже затем, опираясь на полученные данные, выполнять анализ процессов функционирования. В статье проведен анализ случайных величин при условии их нормального и равномерного распределения.

Были сгенерированы две равномерно распределенные случайные последовательности на интервале  $[0, 1]$  длиной 1000. Выполнено поэлементное суммирование. Задача состояла в получении функции плотности, среднего значения и дисперсии суммы двух случайных величин. Преобразование выполнено с помощью Matlab. Получены соответствующие графики зависимости. Расчетное среднее значение и дисперсия отображаются в заголовке каждого графика плотности распределения. Функция «плотность» нормализована относительно частоты  $n_i$  с использованием «функции гистограммы», так что площадь предполагаемой функции плотности распределения равна единице. Преобразованная выходная последовательность является нормально распределенной. Полученные теоретические и практические значения имеют некие флуктуации, но в целом подтверждают друг друга.

Была найдена функция плотности вероятности для двух независимых равномерно распределенных случайных последовательностей и выполнено ее преобразо-

вание в стандартную нормальную функцию плотности независимых случайных величин. Такой подход позволит проводить расчеты для определения показателей надежности и эффективности телекоммуникационных сетей по статистическим данным независимо от первоначальных характеристик функций распределения исследуемых случайных величин, снизить среднее время диагностики, а также путем внесения полученных данных в математические модели, например в модель рекуррентных нейронных сетей, получить возможность прогнозировать их надежность и производительность.

1. Еременко В.Т., Фисун А.П., Сaitов И.А. и др. Методы и модели теории телетрафика: учебное пособие. Орёл: ОГУ им. И.С.Тургенева, 2019. 244 с.
2. Степанов С.Н. Теория телетрафика: концепции, модели, приложения. М.: Горячая линия — Телеком, 2015. С.868.
3. ГОСТ Р ИСО 28640-2012. Статистические методы. Генерация случайных чисел. 2013. С.15.
4. ГОСТ Р 50779-21-2004. Статистические методы. Правила определения и методы расчета статистических характеристик по выборочным данным. 2004. 47 с.
5. Wasserman L. All of Statistics: A concise course in statistical inference. New York: Springer, 2004. P.433.
6. Alizadeh M., Beheshti M.T.H., Ramezani A., Saadatezhad H. Network traffic forecasting based on fixed telecommunication data using deep learning // 6<sup>th</sup> Iranian conference on signal processing and intelligent systems (ICSPIS). 2020. P.1–7. DOI: <https://doi.org/10.1109/ICSPIS51611.2020.9349573>
7. Колемаев В.А., Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник. М.: ИНФРА-М, 1997. 302 с.
8. Guan W., Zhang H. and Leung V.C.M. Analysis of traffic performance on network slicing using complex network theory // IEEE Transactions on vehicular technology. 2020. Vol.69(12). P.15188–15199. DOI: <https://doi.org/10.1109/TVT.2020.3036934>
9. Kay S. Intuitive probability and random processes using Matlab. New York: Springer, 2006. 834 p.
10. Dovbnya V.G., Koptev D.S. Mathematical model of the receiving path of digital communication lines // T-comm. 2021. №5. P.52–57.

### References

1. Eremenko V.T., Fisun A.P., Saitov I.A., et al. Metody i modeli teorii teletrafika: uchebnoe posobie [Methods and models of teletraffic engineering: lecture notes]. Orel, OSU named after I.S. Turgenev Publ., 2019. 244 p.
2. Stepanov S. N. Teoriya teletrafika: kontseptsii, modeli, prilozheniya [Teletraffic engineering: concepts, models, applications]. Moscow, Goryachaya liniya — Telekom Publ., 2015. 868 p.
3. GOST R ISO 28640-2012. Statisticheskie metody. Generatsiya sluchaynykh chisel [Statistical methods. Random variate generation]. 2013. 15 p.
4. GOST P 50779-21-2004. Statisticheskie metody. Pravila opredeleniya i metody rascheta statisticheskikh kharakteristik po vyborochnym dannym [Statistical methods. Rules for determining and methods for calculating statistical characteristics from sample data]. 2004. 47 p.
5. Wasserman L. All of Statistics. New York, Springer Publ., 2004. 433 p.
6. Alizadeh M., Beheshti M.T.H., Ramezani A., Saadinejad H. Network traffic forecasting based on fixed telecommunication data using deep learning. 6<sup>th</sup> Iranian Conference on Signal Processing and Intelligent Systems (ICSPIS), 2020, pp. 1–7. doi: <https://doi.org/10.1109/ICSPIS51611.2020.9349573>
7. Kolemaev V.A., Kalinina V.N. Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika: uchebnik [Probability Theory and Mathematical Statistics: Textbook]. Moscow, INFRA-M Publ., 1997. 302 p.
8. Guan W., Zhang H., and Leung V.C.M. Analysis of traffic performance on network slicing using complex network theory. IEEE Transactions Technology, 2020, vol. 69, pp. 15188–15199. doi: <https://doi.org/10.1109/TVT.2020.3036934>
9. Kay S. Intuitive probability and random processes using Matlab. New York, Springer Publ., 2006. 834 p.
10. Dovbnya V.G., Koptev D.S. Matematicheskaya model' priyemnogo trakta tsifrovyykh liniy svyazi [Mathematical model of the receiving path of digital communication lines]. T-comm, 2021, no. 5, pp. 52–57.