ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

УДК 621.396.67:519.61 ГРНТИ 47.45.29+27.41.17
DOI: 10.34680/2076-8052.2025.1(139).514-521 Специальность ВАК 1.3.8; 2.2.2
Поступила в редакцию / Received 21.07.2025 Принята к публикации / Accepted 28.09.2025

Научная статья

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ИМПЕДАНСНОЙ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ВИБРАТОРНОЙ АНТЕННЫ

Эминов С. И., Сочилин А. В.

Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого (Великий Новгород, Россия)

Аннотация. В работе изучается проволочная антенна произвольной конфигурации. На поверхности антенны выполняется импедансное граничное условие. Оно связывает касательные составляющие электрического и магнитного полей. Использование граничного условия и представление электрического поля через функцию Грина приводит к двумерному интегральному уравнению относительно плотности поверхностных токов. Непосредственное численное решение интегрального уравнения представляется проблемной, так как ядро уравнения обращается в бесконечность, когда точка наблюдения совпадает с точкой излучения. Поэтому в ядре уравнения выделяется особенность и уравнение приводится к виду, допускающему эффективное численное решение на ЭВМ. Исследован оператор, описывающий интегральное уравнение. Выбраны функциональные пространства и показано, что оператор представим в виде суммы обратимого оператора и компактного оператора. Поэтому интегральное уравнение относится к корректной задаче в соответствующих пространствах.

Ключевые слова: *проволочная антенна, импедансное граничное условие, электрическое поле, магнитное поле, двумерное интегральное уравнение, численный метод, особенность в ядре, корректная задача, функция Грина, численный эксперимент, результаты численного анализа*

Для цитирования: Эминов С. И., Сочилин А. В. Интегро-дифференциальное уравнение импедансной криволинейной вибраторной антенны // Вестник НовГУ. 2025. 3 (141). 514–521. DOI: 10.34680/2076-8052.2025.3(141).514-521

Research Article

INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF AN IMPEDANCE CURVILINEAR VIBRATOR ANTENNA

Eminov S. I., Sochilin A.V.

Yaroslav-the-Wise Novgorod State University (Veliky Novgorod, Russia)

Abstract. In this paper we study a wire antenna of arbitrary configuration. An impedance boundary condition is applied on the surface of the antenna. This condition relates the tangential components of the electric and magnetic fields. The use of the boundary condition and the representation of the electric field through the Green's function lead to a two-dimensional integral equation for the surface current density. A direct numerical solution of the integral equation is problematic, since the kernel of the equation becomes singular when the observation point coincides with the source point. Therefore, the singularity is isolated in the kernel, and the equation is transformed into a form that allows for efficient numerical solution on a computer. The operator describing the integral equation is investigated. Appropriate functional spaces are chosen, and it is shown that the operator can be represented as the sum of an invertible operator and a compact operator. Therefore, the integral equation corresponds to a well-set problem in the respective spaces.

Keywords: *wire antenna, impedance boundary condition, electric field, magnetic field, two-dimensional integral equation, numerical method, kernel singularity, well-set problem, Green's function, numerical experiment, numerical analysis results*

For citation: Eminov S. I., Sochilin A. V. Integro-differential equation of an impedance curvilinear vibrator antenna // Vestnik NovSU. 2025. 3 (141). 514–521. DOI: 10.34680/2076-8052.2025.3(141).514-521

Введение

Проволочная антенна произвольной формы впервые изучена и численно исследована в работах [1, 2]. В этих работах предполагалось, что ядро интегрального уравнения непрерывно. Расстояние между точкой излучения и точкой наблюдения не меньше радиуса проволочной антенны. Поэтому этот метод является приближенным. Точные методы исследования интегральных уравнений дифракции электромагнитных волн на незамкнутых поверхностях разработаны в работах [3–5]. А в статье [6] предложен численный метод для решения задач дифракции на произвольных незамкнутых поверхностях. Вместе с тем в работах [1, 6] предполагалось, что поверхность антенны или дифракции – идеально проводящая. Реальные антенны являются металлическими или покрыты слоем диэлектрика. На поверхности таких антенн выполняются более общие граничные условия, а именно импедансные граничные условия. Эти условия связывают тангенциальные составляющие электрических и магнитных полей. Использование представления электрического поля через поверхностные токи и импедансного граничного условия приводит к двумерному интегральному уравнению.

Целью данной работы является теоретическое исследование и численное решение двумерного интегрального уравнения проволочной антенны произвольной конфигурации.

Двумерное интегральное уравнение криволинейной импедансной вибраторной антенны

Рассмотрим проволочную вибраторную антенну, образующая которой в пространстве описывается формулами [7]

$$x = x(\tau),\ y = y(\tau),\ z = z(\tau), \qquad -1 \le \tau \le 1. \tag{1}$$

Антенну предполагаем тонкой. Это означает, что ее радиус a много меньше длины волны и длины антенны. Найдем коэффициент Ламе и орт:

$$H_\tau = \sqrt{x'^2(\tau) + y'^2(\tau) + z'^2(\tau)},\ \ \vec{e}_\tau = \frac{x'(\tau)\vec{i} + y'(\tau)\vec{j} + z'(\tau)\vec{k}}{H_\tau}. \tag{2}$$

На поверхности вибраторной антенны выполняется импедансное граничное условие [8]

$$E_\tau^{\text{вт}} + E_\tau^0 = Zj_\tau, \tag{3}$$

где $E_\tau^{\text{вт}}$ – вторичное электрическое поле,E_τ^0 – первичное электрическое поле, Z – поверхностный импеданс, j_τ – плотность поверхностных токов.

Переходя от плотности тока к полному току [9] по формуле $I(\tau) = 2\pi a j_\tau(\tau)$, получим интегральное уравнение [6]

$$\begin{gathered}\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1} I(\tau)\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial t}S(\tau,t)dt - \frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1} I(\tau)(kH_\tau)(kH_t)(\vec{e}_\tau \cdot \vec{e}_t)S(\tau,t)dt + \\ +iH_\tau\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{Z}{2\pi a}I(\tau) = iH_\tau\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_\tau^0(\tau).\end{gathered} \tag{4}$$

Здесь $\vec{e}_\tau$ и $\vec{e}_t$ – орты, касательные к образующей проволочной антенны в точках τ и t,

$$S(\tau,t) = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \frac{\exp(-\mathrm{ikR})}{4\pi\mathrm{kR}}d\varphi, \tag{5}$$

$$R = \sqrt{R_0^2 + 4a^2 sin^2\frac{\varphi}{2}}, \tag{6}$$

$$R_0 = \sqrt{[x(\tau) - x(t)]^2 + [y(\tau) - y(t)]^2 + [y(\tau) - y(t)]^2}, \tag{7}$$

k – волновое число.

Одномерное гиперсингулярное уравнение

Ядро интегрального уравнения (5) имеет особенность, оно обращается в бесконечность, когда $\varphi = 0$. Кроме того, ядро аналитически не интегрируемо по переменной φ. Применим следующий математический прием [5]: представим ядро в виде суммы двух слагаемых, одно из которых аналитически интегрируемо, а второе – непрерывно и эффективно может быть вычислено на ЭВМ. С этой целью введем в рассмотрение следующий интеграл

$$\frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \frac{1}{\tilde{R}}d\varphi = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{R_0^2 + a^2\varphi^2}}d\varphi = \frac{1}{\pi a}\left[ln\left(\pi a + \sqrt{(\pi a)^2 + R_0^2}\right) + ln\frac{1}{R_0}\right]. \tag{8}$$

После выделения особенности с помощью формулы (8) и несложных преобразований получим одномерное интегро-дифференциальное гиперсингулярное уравнение

$$\frac{1}{4\pi^2(ka)}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{-1}^{1} I(t)\frac{\partial}{\partial t}ln\frac{1}{|\tau-t|}dt + iH_\tau\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{Z}{2\pi a}I(\tau) -$$
$$-\frac{1}{4\pi^2(ka)}\int_{-1}^{1} I(t)(kH_\tau)^2 ln\frac{1}{|\tau-t|}dt + \frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1} I(t)\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial t}S_1(\tau,t)dt - \quad (9)$$
$$\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1} I(t)\, S_2(\tau,t)dt = iH_\tau\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_\tau^0(\tau),$$

где

$$S_1(\tau,t) = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi\left(\frac{\exp(-\mathrm{ikR})}{4\pi\mathrm{kR}} - \frac{1}{k\tilde{R}}\right)d\varphi + \frac{1}{\pi ka}ln\left(\pi ka + \sqrt{(\pi ka)^2 + (kR_0)^2}\right) + \frac{1}{\pi ka}ln\frac{|\tau-t|}{kR_0},$$
$$S_2(\tau,t) = \frac{1}{\pi}(kH_\tau)(kH_t)(\vec{e}_\tau\cdot\vec{e}_t)\int_0^\pi\left(\frac{\exp(-\mathrm{ikR})}{4\pi\mathrm{kR}} - \frac{1}{k\tilde{R}}\right)d\varphi + \frac{1}{\pi ka}(kH_\tau)(kH_t)(\vec{e}_\tau\cdot\ \vec{e}_t)ln\Big(\pi ka +$$
$$\sqrt{(\pi ka)^2 + (kR_0)^2}\Big) + \frac{1}{\pi}(kH_\tau)(kH_t)(\vec{e}_\tau\cdot\vec{e}_t)ln\frac{1}{kR_0} + \frac{1}{\pi ka}(kH_\tau)^2 ln\frac{1}{|\tau-t|}.$$

Операторное уравнение импедансной криволинейной проволочной антенны

Важно отметить, что запись интегрального уравнения (9) соответствует математическому методу преобразования ядра. А теперь запишем это уравнение в операторной форме:

$$\frac{1}{4\pi(ka)}(AI)(\tau) + (BI)(\tau) = e(\tau), \quad (10)$$

где A обозначает главный гиперсингулярный оператор задачи,

$$(BI)(\tau) = iH_\tau\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{Z}{2\pi a}I(\tau) + (LI)(\tau) + (M_1I)(\tau) + (M_2I)(\tau)$$

$$(AI)(\tau) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{-1}^{1} I(t)\frac{\partial}{\partial t}ln\frac{1}{|\tau-t|}dt,$$

$$(LI)(\tau) = -\frac{1}{4\pi^2(ka)}\int_{-1}^{1} I(t)(kH_\tau)^2 ln\frac{1}{|\tau-t|}dt,$$

$$(M_1I)(\tau) = \frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1} I(t)\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial t}S_1(\tau,t)dt,$$

$$(M_2I)(\tau) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1} I(t)\, S_2(\tau,t)dt,$$

$$e(\tau) = iH_\tau\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_\tau^0(\tau).$$

В работах [3, 10] доказано, что оператор A непрерывно отображает функциональное пространство $H_{\frac{1}{2}}(-1,1)$ на все пространство $\widetilde{H}_{-\frac{1}{2}}(-1,1)$. При этом обратный оператор A^{-1} также ограничен и определяется выражением

$$(A^{-1}f)(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f(t)ln\left|\frac{\tau-t}{1-\tau t+\sqrt{1-\tau^2}\sqrt{1-t^2}}\right| dt. \qquad (11)$$

Поскольку оператор $A^{-1}B$ оказывается компактным [5], то уравнение (10) эквивалентно уравнению Фредгольма второго рода.

Численное решение операторного уравнения. Вычисление матричных элементов

Уравнение (10) эффективно решается методом Галеркина или же численно-аналитическим методом с использованием функций

$$\varphi_n(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}\sin\big(narccos(\tau)\big) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}\sqrt{1-\tau^2}\, U_n(\tau), n = 1,2,3, \ldots, \qquad (12)$$

где $U_n(\tau)$ – полиномы Чебышева второго рода:$U_1(\tau) = 1$, $U_2(\tau) = 2\tau$, $U_3(\tau) = 4\tau^2 - 1$.

Матрица оператора A в данном базисе оказывается единичной:

$$(A\varphi_m, \varphi_n) = \begin{cases} 0, m \neq n, \\ 1, m = n. \end{cases} \qquad (13)$$

Матрица единичного оператора находится аналитически с помощью табличного интеграла

$$\big(\varphi_{2j-1}, \varphi_{2i-1}\big) = \frac{\sqrt{(2i-1)(2j-1)}}{2\pi\left(i-j+\frac{1}{2}\right)\left(j-i+\frac{1}{2}\right)\left(i+j-\frac{3}{2}\right)\left(i+j-\frac{1}{2}\right)}. \qquad (14)$$

Матрица оператора L находится аналитически, если коэффициент Ламе H_τ является постоянной величиной. В общем случае интеграл с логарифмической особенностью преобразуется по формуле

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} M(\tau,t)ln|\tau-t|dtd\tau =$$
$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\big(M(\tau,t) - M(\tau,\tau)\big)|\tau-t|dtd\tau + \int_{-1}^{1} M(\tau,\tau)\int_{-1}^{1} ln|\tau-t|dtd\tau. \qquad (15)$$

Первый интеграл в правой части (15) эффективно находится численно, а во втором интегрирование по переменной t проводится аналитически.

Пример численного расчета

Пусть образующая проволочной вибраторной антенны задается соотношениями:$x = r_0 cos(\varphi_0 \tau)$, $y = r_0 sin(\varphi_0 \tau)$,$z = b\tau$, $-1 \leq \tau \leq 1$. Параметры антенны принимают следующие значения: $\frac{r_0}{\lambda} = 0{,}2$, $\frac{b}{\lambda} = 0{,}15$, λ –длина волны в свободном пространстве, $\varphi_0 = 0{,}16$, $ka = \frac{\pi}{120}$, $Z = 12\pi i$. В таблице 1 приведены значения входного сопротивления, вещественная Rи мнимая части X, в зависимости от числа базисных функций N. Правая часть определяется так же, как и в работе [7] с параметром $T = 0{,}01$.

Таблица 1. Значения входного сопротивления в зависимости от числа базисных функций N

N	2	3	4	5	10	20
R, Ом	33,4927	33,8573	33,8088	33,7919	33,8172	33,8133
X, Ом	3,0141	3,9269	3,8739	3,8469	3,8221	3,8291

Результаты, представленные в таблице 1, показывают хорошую сходимость развитого в данной работе метода.

Заключение

Таким образом, в работе предложен метод расчета проволочных антенн произвольной формы, на поверхности которых выполняются импедансные граничные условия. В основе метода лежит вывод двумерного интегрального уравнения на основе граничных условий и его преобразование к виду, допускающему эффективное численное решение. Поскольку полученное уравнение эквивалентно уравнению Фредгольма второго рода, то численное решение полученного уравнения является корректной задачей. В заключении работы рассмотрен пример численного решения, приведена таблица сходимости метода в зависимости от числа базисных функций.

Благодарности

Работа выполнена в рамках реализации НИР «Математическое моделирование природных процессов», выполняемой по государственному заданию в сфере научной деятельности.

Список литературы

1. Mei K.K. On the integral equations of thin wire antennas // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1965. 13 (3). 374–378. DOI: 10.1109/TAP.1965.1138432
2. Вычислительные методы в электродинамике. Москва: Мир, 1977. 485 с.

3. Stephan E.P. Boundary integral equations for screen problem in IR^3 // Integral equations and operator theory. 1987. 10. 236–257. DOI: 10.1007/BF01199079

4. Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. Интегральные уравнения для задач дифракции волн на экранах // Радиотехника и электроника. 1994. 39 (1). 23–31.

5. Ильинский А. С., Смирнов Ю. Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах: псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции. Москва: ИПРЖ «Радиотехника», 1996. 176 с.

6. Давыдов А. Г., Захаров Е. В., Пименов Ю. В. Метод численного решения задач дифракции электромагнитных волн на незамкнутых поверхностях произвольной формы // Доклады АН СССР. 1984. 276 (1). 96–100.

7. Сочилин А. В., Эминов С. И. Численно-аналитический метод расчета криволинейных вибраторных антенн // Радиотехника и электроника. 2017. 62 (1). 59–64. DOI: 10.7868/S0033849417010144

8. Васильев Е. Н. Возбуждение тел вращения. Москва: Радио и связь, 1987. 272 с.

9. Неганов В. А., Табаков Д. П., Яровой Г. П. Современная теория и практические применения антенн: монография. Москва: Радиотехника, 2009. 720 с.

10. Эминов С. И. Аналитическое обращение операторной матрицы задачи дифракции на отрезке цилиндра в пространствах Соболева // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2021. 61 (3). 450–456. DOI: 10.31857/S0044466921030054

References

1. Mei K. K. On the integral equations of thin wire antennas // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1965. 13 (3). 374–378. DOI: 10.1109/TAP.1965.1138432

2. Computational methods in electrodynamics. Moscow: Mir Publ., 1977. 485 p. (In Russian).

3. Stephan E.P. Boundary integral equations for screen problem in IR3 // Integral equations and operator theory. 1987. 10. 236–257. DOI: 10.1007/BF01199079

4. Ilyinsky A. S., Smirnov Yu. G. Integral equations for diffraction problems on screens // Journal of Communications Technology and Electronics. 1994. 39 (1). 23–31. (In Russian).

5. Ilyinsky A. S., Smirnov Yu. G. Diffraction of electromagnetic waves on conductive thin screens. Moscow: IPRZh Publ., 1996. 173 p. (In Russian).

6. Davydov A. G., Zakharov E. V., Pimenov Yu. V. A numerical method for solving diffraction problems of electromagnetic waves on open surfaces of arbitrary shape. // Proceedings of the USSR Academy of Sciences. 1984. 276 (1). 96–100. (In Russian).

7. Sochilin A. V., Eminov S. I. A numerical–analytical method for calculation of curved dipole antennas // Journal of communications technology and electronics. 2017. 62 (1). 55–60. DOI: 10.1134/S1064226917010132

8. Vasilev E. N. Rotational excitation. Moscow: Radio and communication Publ., 1987. 272 p. (In Russian).

9. Neganov V. A., Tabakov D. P., Yarovoy G. P. Modern theory and practical applications of antennas. Moscow: Radio Engineering Publ., 2009. 720 p. (In Russian).

10. Eminov S. I. Analytical inversion of the operator matrix of the diffraction problem on a cylinder segment in Sobolev spaces // The Journal of computational mathematics and mathematical physics. 2021. 61 (3). 450–456. DOI: 10.31857/S0044466921030054 (In Russian).

Информация об авторах

Эминов Стефан Ильич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор, Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого (Великий Новгород, Россия), ORCID: 0000-0001-9497-8234, Stefan.Eminov@novsu.ru

Сочилин Андрей Викторович – кандидат технических наук, доцент, Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого (Великий Новгород, Россия), ORCID: 00090001-6857-7418, Andrey.Sochilin@novsu.ru