ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

УДК 621.396.67:517.968
DOI: 10.34680/2076-8052.2025.1(139).151-162
Поступила в редакцию / Received 09.11.2024

ГРНТИ 47.45.29+27.33.15
Специальность ВАК 1.3.8.
Принята к публикации / Accepted 29.11.2024

Научная статья

ТЕОРИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВИБРАТОРНЫХ АНТЕНН В РАБОТАХ П. Л. КАПИЦЫ, В. А. ФОКА И Л. А. ВАЙНШТЕЙНА

Эминов С. И., Сочилин А. В.

Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого (Великий Новгород, Россия)

Аннотация. Дается обзор работ П. Л. Капицы, В. А. Фока и Л. А. Вайнштейна по теории интегральных уравнений вибраторных антенн, опубликованных в период с 1959 по 1967 год. Отмечены наиболее важные результаты, которые актуальны и в настоящее время. Подчеркнуты связи между отдельными результатами, очерчен контур теории ядра интегрального уравнения. Эта теория включает разложение ядра в ряд по произведениям функций Ханкеля и Бесселя полуцелого индекса, а также представление ядра через гипергеометрическую функцию. Проведен анализ вычислительного эксперимента В. А. Фока и Л. А. Вайнштейна для передающего вибратора, получено феноменальное совпадение с результатами других методов решения интегральных уравнений с точным сингулярным ядром. Дано теоретическое обоснование этого явления.

Ключевые слова: *вибраторная антенна, интегральное уравнение, ядро интегрального уравнения, численные методы, вычислительный эксперимент.*

Для цитирования: Эминов С. И., Сочилин А. В. Теории интегральных уравнений вибраторных антенн в работах П. Л. Капицы, В. А. Фока и Л. А. Вайнштейна // Вестник НовГУ. 2025. 1 (139). 151–162. DOI: 10.34680/2076-8052.2025.1(139).151-162

Research Article

THE THEORY OF INTEGRAL EQUATIONS DIPOLE ANTENNAS IN THE WORKS OF P. L. KAPITSA, V. A. FOCK AND L. A. WEINSTEIN

Eminov S. I., Sochilin A. V.

Yaroslav-the-Wise Novgorod State University (Veliky Novgorod, Russia)

Abstract. The review of the works of P. L. Kapitsa, V. A. Fock and L. A. Weinstein on the theory of integral equations of dipole antennas published in the period from 1959 to 1967 is given. The most significant results are noted, which are still relevant at the present time. The connections between the individual results are emphasized, and the outline of the theory of the kernel of the integral equation is outlined. This theory includes the decomposition of the kernel into a series by products of the Hankel and Bessel functions of the half-integer index, as well as the representation of the kernel through a hypergeometric function. The analysis of the computational experiment of V. A. Fock and L. A. Weinstein for a transmitting dipole was carried out, and a phenomenal coincidence with the results of other methods for solving integral equations with an exact singular kernel was obtained. A theoretical justification of this phenomenon is given.

Keywords: *dipole antenna, integral equation, the core of the integral equation, numerical methods, computational experiment.*

For citation: Eminov S. I., Sochilin A. V. The theory of integral equations dipole antennas in the works of P. L. Kapitsa, V. A. Fock and L. A. Weinstein // Vestnik NovSU. 2025. 1 (139). 151–162. DOI: 10.34680/2076-8052.2025.1(139).151-162

Введение

Рассмотрим трубчатый линейный вибратор длины $2l$ и радиуса a. Пусть на идеально-проводящую поверхность вибратора падает электромагнитная волна $\vec{E}^0, \vec{H}^0$.

В результате на поверхности вибратора S наводятся электрические токи с плотностью $\vec{j}$. В предположении, что первичное электрическое поле параллельно оси z и не зависит от координаты ϕ (в цилиндрической системе координат r, ϕ, z), на поверхности наводятся только аксиальные токи с плотностью $j_z(z)$. Нахождение функции токов сводится к решению интегро-дифференциального уравнения [1]

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2\right) \iint_S j_z(z') \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} dS' = -i\omega\varepsilon E_z^0(z), \tag{1}$$

где $R = \sqrt{(z - z')^2 + 2a^2(1 - cos(\phi - \phi'))}$, $dS' = adz'd\phi'$, ε – диэлектрическая проницаемость, k – волновое число, зависимость от времени в данной работе принята в виде $e^{i\omega t}$.

Если обратить дифференциальный оператор, то уравнение (1) сведется к интегральному уравнению

$$\iint_S j_z(z') \frac{e^{-ikR}}{4\pi R} dS' = -i\omega\varepsilon \int_{-l}^{l} \frac{sin|k(z-z')|}{2k} E_z^0(z') dz' + C_1 \sin k\, z + C_2 \cos k\, z. \tag{2}$$

В теории антенн применяется как уравнение (1), так и уравнение (2). При этом функция $j_z(z)$ на концах вибратора обращается в нуль

$$j_z(-l) = j_z(l) = 0. \tag{3}$$

При решении уравнения (1) граничные условия (3) выполняются за счет выбора базисных функций, а при решении уравнения (2) за счет выбора постоянных C_1 и C_2.

О методе исследования уравнений

Функция $j_z(z)$ не зависит от ϕ, поэтому уравнения (1) и (2) являются одномерными уравнениями с ядром вида

$$f(z - z') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-ikR}}{R} d\phi'. \tag{4}$$

В основе исследования уравнений (1) и (2) лежит метод исследования ядра (4), форма представления и способ вычисления. Поэтому, приступая к обзору упомянутых работ, будем следить за преобразованиями ядра (4).

О работе «Симметричные электрические колебания идеально-проводящего полого цилиндра конечной длины»

Для исследования была принята работа [2]. В литературе по электродинамике, например, в [3], выводится разложение функции Грина для свободного пространства в ряд-интеграл

$$\frac{exp(-ikR)}{4\pi R} = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} exp\big(-in(\phi-\phi')\big)\int_{-\infty}^{+\infty} exp\big(-ih(z-z')\big)\,F_n(h)dh\,, \tag{5}$$

где

$F_n(h) = I_n(\sqrt{h^2-k^2}r)K_n(\sqrt{h^2-k^2}a)$ при $r < a$,

$F_n(h) = I_n(\sqrt{h^2-k^2}a)K_n(\sqrt{h^2-k^2}r)$ при $r > a$,

$I_n,\ K_n$ – модифицированные функции Бесселя.

Проинтегрировав (5), найдем ядро (4) одномерных уравнений

$$f(z-z') = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} cos\big(h(z-z')\big)\begin{Bmatrix} F_0(h) = \frac{2}{\pi} I_0(\sqrt{h^2-k^2}r)K_0(\sqrt{h^2-k^2}a) \\ F_0(h) = \frac{2}{\pi} I_0(\sqrt{h^2-k^2}a)K_0(\sqrt{h^2-k^2}r) \end{Bmatrix} dh. \tag{6}$$

Верхняя строчка берется при $r < a$, а нижняя строчка – при $r > a$. Представление ядра в виде интеграла Фурье-Бесселя (6) впервые было получено в работе [2]. У многозначной функции $\sqrt{x^2-k^2}$ принимается та ветвь, для которой выполняется равенство

$\sqrt{x^2-k^2} = i\sqrt{k^2-x^2},\ \big(\sqrt{k^2-x^2} > 0\big).$

При больших значениях аргумента модифицированные функции Бесселя имеют следующую асимптотику

$$I_0(ah)K_0(ah) \approx \frac{1}{2ah}, (ah) \to +\infty, \tag{7}$$

Сравнивая (6), когда $r = a$, с представлением логарифма

$$ln\frac{1}{|t|} = C + \int_0^1 \frac{cos(th)-1}{h}dh + \int_1^{+\infty}\frac{cos(th)}{h}dh, \tag{8}$$

и учитывая (7), убеждаемся, что ядро имеет логарифмическую особенность.

Важным для дальнейшего результатом является разложение ядра в ряд Фурье

$$f(z-z') = \frac{1}{2l}\sum_{n=0}^{+\infty}\varepsilon_n F_n\, cos\frac{\pi n}{2l}(z-z'), \tag{9}$$

где $-2l < z-z' < 2l$, $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = 2$.

Для нахождения коэффициентов разложения интеграл по промежутку $[0,2l]$ представляется в виде разности интегралов по промежутку $0,+\infty)$ и $2l,+\infty)$. Первый из этих интегралов находится аналитически в результате применения прямого и обратного преобразования Фурье. Второй интеграл находится приближенно с помощью разложения ядра в ряд по произведениям функций Ханкеля и Бесселя полуцелого индекса [2, формула (1.15)]. При этом рассматривается приближение тонкого вибратора

$$\frac{a}{l} << 1,\ ka << 1. \tag{10}$$

Окончательно получено

$$F_n = I_0\left(\sqrt{n^2\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 - k^2}a\right)K_0\left(\sqrt{n^2\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 - k^2}a\right) + \Delta F_n, \tag{11}$$

$$\Delta F_n = \frac{1}{2}[E(2kl+\pi n) + E(2kl-\pi n)],$$

$$E(x) = -\int_x^{+\infty}\frac{exp(-ih)}{h}dh \text{ при } x > 0,\ E(x) = -\int_{-x}^{+\infty}\frac{exp(ih)}{h}dh, \text{ при } x < 0.$$

Ядро в представлении (9) также имеет логарифмическую особенность, замена точного значения второго интеграла на приближенное значение ΔF_n не влияет на структуру уравнения. И это имеет принципиальное значение с точки зрения разрабатываемых методов.

Представление ядра в виде ряда Фурье имеет преимущество по сравнению с представлением в виде интеграла Фурье-Бесселя для дальнейших вычислений, а именно расчета матричных элементов.

В работе [2] интегральное уравнение сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Существенным здесь является ортогональность тригонометрических функций.

Опишем способ сведения интегральных уравнений к системам, используя, для лаконичности, язык гильбертово пространства H со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и ортонормированным базисом $\{\phi_m\}_{m=1}^{+\infty}$. Решение операторного уравнения

$$Ku = v \tag{12}$$

ищется в виде ряда

$$u = \sum_{m=1}^{+\infty} c_m\,\phi_m \tag{13}$$

с неизвестными коэффициентами c_m. Для их нахождения вначале (13) подставляем в (12)

$$\sum_{m=1}^{+\infty} c_m K\,\phi_m = v,$$

а затем приравниваются коэффициенты разложения левой и правой части по базису. Это равносильно тому, чтобы левые и правые части умножить на базисные функции. Таким путем приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{m=1}^{+\infty} c_m(K\phi_m, \phi_n) = (v, \phi_n), 1 \leq n < +\infty. \quad (14)$$

В работе [2] решена проблема вычисления матричных элементов в тригонометрическом базисе. Интегрирование по переменным длины z и z' проведено аналитически, в результате матричные элементы представлены в виде числового ряда. На основе асимптотики (7) показана применимость метода итераций для решения систем. Проведено сравнение с теорией тонких вибраторов, описаны асимптотики, при применении которых получаются результаты Халлена [4] и Леонтовича и Левина [5].

О работе «Статистические граничные задачи для полого цилиндра конечной длины»

Работа [6] является емкой и результативной. Мы начнем с решения интегрального уравнения с логарифмическим ядром

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} ln\frac{1}{|\tau-t|}u(t)dt = v(\tau),\ -1 \leq \tau \leq 1. \quad (15)$$

В работе решение уравнения (15) найдено в виде

$$u(\tau) = \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n T_n(\tau), \quad (16)$$

где $T_n(\tau) = cos(n \cdot arccos\tau)$ – полиномы Чебышева первого рода, а неизвестные α_n определяются по формулам

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi ln2}\int_{-1}^{1}\frac{v(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt,\ \ \alpha_n = \frac{2n}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{v(t)T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt \text{ при } n > 0. \quad (17)$$

Таким образом, уравнение (15) решено в явном виде. Заметим, что этот результат получен в конце рассматриваемой работы, и мы опишем путь, который приводит к нему.

Особо важную роль играет в дальнейшем, при разложении ядра в степенной ряд. Рассмотрено ядро в статическом случае, но более общего вида, а именно

$$f_m(z-z') = \int_0^{2\pi}\frac{\cos m\phi}{2\pi\sqrt{(z-z')^2+2a^2-2a^2\cos\phi}}d\phi. \quad (18)$$

Вначале ядро сведено к гипергеометрической форме, затем осуществляется преобразование гипергеометрической функции к виду, для которого известно разложение в ряд

$$f_m(z-z')=\frac{1}{\pi a}\sum_{k=0}^{+\infty}c_k\left(-\frac{(z-z')^2}{4a^2}\right)^k\left(\ln\frac{2a}{|z-z'|}+\frac{h_k}{2}\right), \qquad (19)$$

сходящийся при $|z-z'|<2a$. Коэффициенты ряда определяются по формулам

$$c_k=\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}+k\right)\Gamma\left(-m+\frac{1}{2}+k\right)}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-m+\frac{1}{2}\right)(k!)^2},$$

$$h_k=2\psi(k+1)-\psi\left(k+m+\frac{1}{2}\right)-\psi\left(k-m+\frac{1}{2}\right),$$

где Γ – гамма функция, ψ – логарифмическая производная гамма функции.

$$\psi(x+1)=\psi(x)+\frac{1}{x},\ \psi(1)=-C,\ \psi\left(\frac{1}{2}\right)=-C-2\ln 2,\ C=0{,}5772.$$

Обсудим разложение (19). Ядро имеет логарифмическую особенность, одинаковую при всех m и этот результат, по известной нам литературе, был получен впервые. Второе слагаемое ряда непрерывно вместе с частной производной.

Интересно сравнить ряд (19) с ядром в двумерной задаче дифракции, например, на полосе [7]. Ядро в этом случае представляется через функцию Ханкеля, которая разлагается в ряд, подобный ряду (19). Таким образом, разложением ядра в ряд (19) трехмерная задача дифракции сведена к двумерной задаче.

Опишем метод сведения интегрального уравнения к бесконечной системе в работе [6]. Неизвестная функция разлагается в ряд (16) по полиномам Чебышева с весом. Это разложение подставляется в интегральное уравнение, затем левая и правая части полученного равенства разлагаются в ряды по полиномам Чебышева. Существенным в этом подходе является ортогональность полиномов с весом. Из равенства коэффициентов разложений левой и правой части и выводится система уравнений. Матричные элементы полученной системы в точности такие же, как и в методе Галеркина на основе полиномов Чебышева с весом.

Центральная проблема в теории уравнений дифракции – вычисление матричных элементов. В работе [6] предложены два эффективных метода для вычисления матричных элементов.

В первом методе ядро представляется в виде ряда (19) и для каждого k вычисляется двойной и весьма непростой интеграл аналитически, с помощью преобразований и табличных интегралов. В результате матричные элементы представляются в виде ряда. Для частного случая, когда в ряде (19) учитывается одно слагаемое, $k=0$, т. е. для логарифмической функции матричные элементы записаны явно. Матрица оказывается диагональной, отсюда получается формула аналитического обращения уравнения (15).

Во втором методе ядро представляется в виде интеграла Фурье-Бесселя (статический случай), содержащем модифицированную Функцию Бесселя и Макдональда. Интегрирование по координатам длины и z и z' проводится аналитически и под интегралом появляются еще две функции Бесселя. В результате матричные элементы – это интеграл от произведения четырех специальных функций. В работе разработан метод вычисления подобного интеграла.

Показано, что два метода приводят к единому результату.

О работе «Симметричные электрические колебания идеально-проводящего полого цилиндра конечной длины. II. Численные расчеты для пассивного вибратора»

В начале работы [8] отмечается медленная сходимость при использовании тригонометрического базиса. Поэтому избран другой путь – решение ищется в виде отрезка ряда (16), т.е. по полиномам Чебышева с весом. Для решения задачи дифракции плоской волны, падающей нормально на вибратор, используется уравнение (2), ядро которого разложено в ряд Фурье (9). Метод формирования системы, как отметили выше, совпадает с методом Галеркина, полученная система линейных алгебраических уравнений решается методом Гаусса. В результате решения с учетом граничных условий (3) находится ток, обращающийся в нуль на концах вибратора по корневому закону, т. е. удовлетворяет условиям Мейкснера на ребре.

Отметим, что в более поздних работах по дифракции при решении интегральных уравнений с логарифмической особенностью в ядре, в явном виде выделяется слагаемое вида левой части (15) и аналитически находятся матричные элементы выделенного оператора. В данной работе применяется другой подход: находится асимптотика матричных элементов, выраженных через функции Бесселя, и на основе асимптотики улучшается сходимость рядов.

Отмечается быстрая сходимость численного метода, для стабилизации оказывается достаточным четырех базисных функций. Это связано, во-первых, с использованием полиномов Чебышева с весом. Во-вторых, как показывают недавние исследования, эффект быстрой сходимости связан со структурой ряда (19), в котором присутствуют только четные степени.

О работе «Симметричные электрические колебания идеально-проводящего полого цилиндра конечной длины. III. Передающий вибратор. Общие замечания»

Рассматриваемая работа относится к числу законченных работ, как в плане теории, так и численного эксперимента. К числу трудно вычисляемых характеристик вибраторных антенн относится входное сопротивление, которое выражается через значение неизвестной функции тока в точке. Входное сопротивление чувствительно к малейшим изменениям параметров антенны: длины, радиуса и первичного поля. По этой причине многие антенные школы ищут и разрабатывают свои методы для вычисления входного сопротивления.

Изложение начнем с таблицы входных сопротивлений, приведенной в этой работе. Вначале исследуем скорость сходимости метода, на основе которого построена таблица 1. В монографии [9] приведены графики входных сопротивлений, полученных методом моментов, в зависимости от числа N базисных функций. Графики представляют выпуклые или вогнутые линии, которые только начинают выпрямляться к концу рисунка. Если результаты таблицы 1 для случая $\frac{l}{a} = 60$, $\Delta = \frac{l}{10}$, нанести на рисунок, то получим прямые линии. Скорость сходимости метода Вайнштейна – Фока во много раз превышает скорость сходимости метода момента. В чем причина этого факта?

Таблица 1. Входные сопротивления Z из работы [10]

N	$kl=\frac{\pi}{2},\quad \frac{l}{a}=60$			$kl=\frac{\pi}{2},\quad \frac{l}{a}=500\pi$		
	$\Delta=l/10$	$\Delta=a$	$\Delta=10a$	$\Delta=l/10$	$\Delta=a$	$\Delta=10a$
8	88,8 – 51,4i					
9	89,6 – 51,6i					
10	89,2 – 51,5i			79,3 – 47,6i		
11	89,6 – 51,6i			81,4 – 48,3i	81,8 – 48,1i	81,7 – 48,2i
12	89,4 – 51,5i	94,0 – 48,6i	88,1 – 52,3i	79,6 – 47,2i	80,0 – 47,0i	79,8 – 47,1i
13	89,6 – 51,6i	94,2 – 48,6i	88,3 – 52,3i			

В работе [10] развит новый метод расчета входных сопротивлений. Первичное поле представлено в виде дельта функции. Однако, если первичное поле представить в виде дельта функции, то значение тока в точке возбуждения обращается в бесконечность. По этой причине вначале решается уравнение (15) только с логарифмическим ядром.

Затем решение всей задачи представляется в виде суммы найденной функции и отрезка ряда по базису с неизвестными коэффициентами, для определения которых составляется система линейных алгебраических уравнений. Так как значение тока в нуле обращается в бесконечность, то при определении входных сопротивлений берется значение не в нуле, а в точке $z = \Delta$, где 2Δ – ширина зазора.

Какова точность результатов, приведенных в таблице 1?

Вопрос о точности был снят в работе [11], где проведено сравнение с результатами таблицы 1 и получено хорошее совпадение. В отличии от работы [11], здесь приводится фрагмент, в котором N меняется в тех же пределах, как и в таблице 1.

Обращаем внимание на противоположный знак для реактивного сопротивления, связанный с временной зависимостью.

Сравним таблицы 1 и 2 для очень тонкого вибратора $\frac{l}{a} = 500\pi$ при всех Δ по строке, соответствующей значению $N = 12$. Видим феноменальное совпадение двух результатов, полученных на основе решения уравнения (2) – таблица 1 и уравнения (1) – таблица 2. Причина такого совпадения в том, что в работе [11] также применен метод выделения логарифмической особенности и аналитического обращения главного оператора.

Таблица 2. Входные сопротивления Z из работы [11]

N	$kl = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{l}{a} = 60$			$kl = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{l}{a} = 500\pi$		
	$\Delta = l/10$	$\Delta = a$	$\Delta = 10a$	$\Delta = l/10$	$\Delta = a$	$\Delta = 10a$
8	91,9+50,5i	96,4+46,8i	90,7+51,8i	80,1+47,3i	80,4+46,8i	80,3+46,9i
9	91,9+50,4i	96,5+46,8i	90,7+51,8i	80,3+47,4i	80,7+46,8i	80,5+46,9i
10	92,0+50,4i	96,6+46,8i	90,7+51,8i	80,3+47,4i	80,7+46,8i	80,5+46,9i
11	92,0+50,4i	96,6+46,7i	90,7+51,8i	80,4+47,4i	80,8+46,8i	80,6+46,9i
12	92,0+50,4i	96,6+46,7i	90,7+51,8i	80,3+47,4i	80,8+46,7i	80,6+46,9i
13	92,0+50,4i	96,6+46,7i	90,7+51,8i	80,4+47,4i	80,9+46,7i	80,7+46,9i

Далее, в таблице 1 видим осцилляции для очень тонкого вибратора $\frac{l}{a} = 500\pi$, которых нет для умеренно тонкого вибратора $\frac{l}{a} = 60$. В чем их причина? Она заложена в методе выделения логарифмической особенности. Эффективность этого метода, как следует из асимптотики (7) и ряд (19) зависит от радиуса a. С увеличением радиуса растет эффективность, с уменьшением – падает.

Если сравнить таблицы 1 и 2 для умеренно тонкого вибратора, $\frac{l}{a} = 60$, то видим небольшое различие результатов. Для этого есть две причины. Во-первых, в работе [10] используется приближение тонкого вибратора (10), а во-вторых, в работах [10] и [11] приняты разные математические модели для описания первичного поля. Однако влияние этих дух факторов ослабевает, по мере уменьшения радиуса.

Таким образом, в работе Л. А. Вайнштейна и В. А. Фока [10] был предложен новый численно-аналитический метод решения интегрального уравнения (2), который быстро сходится по мере увеличения числа базисных функций. Решение при этом удовлетворяет условию Мейкснера на ребре, ток убывает на концах антенны по корневому закону. По эффективности и математической точности метод Л. А. Вайнштейна и В. А. Фока, на наш взгляд, на тот момент, не имел аналогов в мировой научной литературе.

О методе моментов в теории антенн

В конце 50-х, в начале 60-х годов 20-го века активное развитие получили численные методы расчета антенн, объединенных под общим названием метод моментов [9]. Решение ищется в виде конечной суммы базисных функций с неизвестными коэффициентами и подставляется в интегральное уравнение. Затем обе части полученного равенства либо приравниваются в выбранных точках (метод коллокации или метод сшивания) либо умножаются на некоторые функции, называемые весовыми, и интегрируются. В обоих случаях получается система линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов разложения по базису. Если весовые функции совпадают с базисными функциями, то имеем метод Галеркина.

Во всех алгоритмах метода моментов точное ядро заменяется приближенным, точка излучения $M'(r', \phi', z')$ располагается на оси $r' = 0$, а точка наблюдения $M(r, \phi, z)$ на поверхности вибратора $r = a$. В результате расстояние между точками принимает вид

$$R = \sqrt{(z - z')^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\phi - \phi')} = \sqrt{(z - z')^2 + a^2}. \qquad (20)$$

В монографии [9] показано, что для тонких вибраторов результаты, полученные на основе метода моментов, графически совпадают с экспериментальными данными. Появление метода моментов существенно ослабило остроту проблемы расчета вибраторных антенн. Поскольку методы, развитые ранее в работах Халлена [4], Леонтовича и Левина [5], позволяли рассчитывать лишь экспоненциально тонкие вибраторы. Наряду с условиями

$$\frac{a}{l} << 1,\ ka << 1 \qquad (21)$$

должно также выполняться одно из двух условий

$$\frac{1}{2\ln\frac{l}{a}} << 1 \text{ или } \frac{1}{2\ln\frac{1}{ka}} << 1. \qquad (22)$$

Дальнейшее развитие метода моментов шло по пути усложнения конфигурации антенны. Однако проблема решения интегральных уравнений с точными ядрами оставалась нерешенной в границах метода моментов.

Заключение

1. В работах [2, 6] проведено теоретическое исследование ядра, имеющую особенность при совпадении точки наблюдения и точки излучения. На этом пути получены следующие представления и разложения для ядра:

– представление ядра интегралом Фурье-Бесселя [2, формула (1.8)];

– разложение ядра в ряд по произведениям функций Ханкеля и Бесселя полуцелого индекса [2, формула (1.15)];

– разложение ядра в ряд Фурье на отрезке $[-2l, 2l]$, [2, формула (2.02)];

– представление ядра через гипергеометрическую функцию [6, формула (1.08)];

– разложение ядра в степенной ряд [6, формула (4.07)].

Каждое из этих представлений нашло в рассматриваемых работах свое применение. Вместе они составляют основу теории ядра интегрального уравнения в трехмерной задаче дифракции. На основе последнего разложения в ряд доказано, что ядро имеет логарифмическую особенность.

2. В работах [2, 6] развиты методы сведения интегральных уравнений к бесконечным системам на основе тригонометрических функций и полиномов Чебышева первого рода с весом. Интегральное уравнение с чисто логарифмическим ядром решено в аналитической форме.

3. В работах [2, 6] развиты методы вычисления матричных элементов. Наряду с разложением в ряд (19), выдающимся результатом является разложение матричных элементов в ряд [6, формула (4.10)].

4. В работе [8] предложен метод решения уравнения дифракции на поверхности вибратора на основе полиномов Чебышева с весом. Получена чрезвычайно быстрая сходимость. На наш взгляд, работы [6, 8] вместе положили начало новому направлению в теории уравнений дифракции: поиск решения в виде ряда или отрезка ряда по функциям, каждая из которых удовлетворяет условию Мейкснера на ребре.

5. В работе [10] предложен новый метод решения задачи возбуждения вибраторных антенн, сочетающий в себе аналитический метод с численным. Получена быстрая сходимость и хорошее совпадение с другими результатами.

Благодарности

Работа выполнена в рамках реализации НИР «Математическое моделирование природных процессов», выполняемой по государственному заданию в сфере научной деятельности.

Список литературы

1. Васильев Е. Н. Возбуждение тел вращения. Москва: Радио и связь, 1987. 272 с.
2. Капица П. Л., Фок В. А., Вайнштейн Л. А. Симметричные электрические колебания идеально-проводящего полого цилиндра конечной длины // Журнал технической физики. 1959. 29 (10). 1188.
3. Марков Г. Т., Чаплин А. Ф. Возбуждение электромагнитных волн. 2-е изд., перераб. и доп. Москва: Радио и связь, 1983. 295 с.
4. Hallen E. Theoretical investigations into the transmittion and receving qualitities of antennae // Nova acta regiae societatis scientiarum upsaliensis. Ser. 4. 1938. 11 (4). 1–44.
5. Леонтович М. А., Левин М. Л. К теории возбуждения колебаний в вибраторных антеннах // Журнал технической физики. 1944. 14 (9). 481–506.
6. Капица П. Л., Фок В. А., Вайнштейн Л. А. Статистические граничные задачи для полого цилиндра конечной длины // Журнал технической физики. 1959. 29 (10). 1177–1180.

7. Захаров Е. В., Пименов Ю. В. Численный анализ дифракции радиоволн. Москва: Радио и связь, 1982. 184 с.
8. Вайнштейн Л. А. Симметричные электрические колебания идеально-проводящего полого цилиндра конечной длины. II. Численные расчеты для пассивного вибратора // Журнал технической физики. 1967. 37 (7). 1181–1187.
9. Вычислительные методы в электродинамике / пер. с англ.; под ред. Р. Митры. Москва: Мир, 1977. 485 с.
10. Вайнштейн Л. А., Фок В. А. Симметричные электрические колебания идеально-проводящего полого цилиндра конечной длины. III. Передающий вибратор. Общие замечания // Журнал технической физики. 1967. 37 (7). 1189–1195.
11. Эминов С. И., Сочилин А. В. Численно-аналитический метод решения интегральных уравнений вибраторных антенн // Радиотехника и электроника. 2008. 53 (5). 523–528.

References

1. Vasil'ev E. N. Rotational excitation // Moscow: Radio i svyaz’ Publ., 1987. 272 p. (In Russian).
2. Kapitsa P. L., Fock V. A., Vainstein L. A. Symmetric electric oscillations of an ideal conducting hollow finite cylinder // Technical Physics. 1959. 29 (10). 1188. (In Russian).
3. Markov G. T., Chaplin A. F. Rotational excitation // Moscow: Radio i svyaz’ Publ., 1983. 295 p. (In Russian).
4. Hallen E. Theoretical investigations into the transmittion and receving qualitities of antennae // Nova acta regiae societatis scientiarum upsaliensis. Ser. 4. 1938. 11 (4). 1–44.
5. Leontovich M. A., Levin M. L. About the theory of rotational excitation in dipole antennas // Technical Physics. 1944. 14 (9). 481–506. (In Russian).
6. Kapitsa P. L., Fock V. A., Vainstein L. A. The solution of the static equation for hollow cylinder // Technical Physics. 1959. 29 (10). 1177–1180. (In Russian).
7. Zakharov E. V., Pimenov Yu. V. Calculation of Diffraction Attenuation on Radio Waves // Moscow: Radio i svyaz’ Publ., 1982. 184 p. (In Russian).
8. Vainstein L. A. Symmetric electric oscillations of an ideal conducting hollow finite cylinder II. To the method for calculation of an electromagnetic vibrator // Technical Physics. 1967. 37 (7). 1181–1187. (In Russian).
9. Mathematical methods in Electronics / transl. from Eng.; ed. by R. Mitra. Moscow: Mir Publ., 1977. 485 p. (In Russian).
10. Vainstein L. A., Fock V. A. Symmetric electric oscillations of an ideal conducting hollow finite cylinder III // Technical Physics. 1967. 37 (7). 1189–1195. (In Russian).
11. Eminov S. I., Sochilin A. V. A numerical-analytic method for solving integral equations of dipole antennas // Journal of Communications Technology and Electronics. 2008. 53 (5). 523–528. (In Russian).

Информация об авторах

Эминов Стефан Ильич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор, Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого (Великий Новгород, Россия), ORCID: 0000-0001-9497-8234, Stefan.Eminov@novsu.ru

Сочилин Андрей Викторович – кандидат технических наук, доцент, Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого (Великий Новгород, Россия), ORCID: 00090001-6857-7418, Andrey.Sochilin@novsu.ru