

ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

УДК 537.8:539.2:517.9

DOI: 10.34680/2076-8052.2025.1(139).108-122

Поступила в редакцию / Received 12.02.2025

ГРНТИ 29.05.33+29.29.49+27.39.19

Специальность ВАК 1.3.8.

Принята к публикации / Accepted 14.03.2025

Научная статья

ДИНАМИКА ЧАСТИЦ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ПОСРЕДСТВОМ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Зубков В. В.¹, Майфат Д. А.¹, Зубкова А. В.²

¹ Тверской государственный университет (Тверь, Россия)

² Тверской государственный технический университет (Тверь, Россия)

Аннотация. На основе лагранжевого описания системы частиц и поля получен закон изменения энергии системы точечных частиц, взаимодействующих друг с другом посредством составного скалярного поля Клейна-Фока-Гордона. Движение частиц рассматривалось как нерелятивистское, в то время как динамика поля всегда существенно релятивистская по своей природе. Показано, что в рамках модели независимых скалярных полей полная энергия частиц за время эволюции системы убывает. Также получен закон изменения свойственной классической механике полной механической энергии системы частиц. В качестве примера рассмотрены типичные для модели простых жидкостей и газов устойчивые по критерию Добрушина-Рюэля-Фишера двойные потенциалы Юкавы. Показано, что для таких физически реалистичных потенциалов скорость изменения механической энергии частиц отрицательна. Обсуждены связанные с проведенным исследованием вопросы фундаментального характера, такие как явление необратимости и обоснование распределений Гиббса.

Ключевые слова: классическая релятивистская динамика, запаздывающие взаимодействия, уравнение Клейна-Фока-Гордона, явление необратимости.

Для цитирования: Зубков В. В., Майфат Д. А., Зубкова А. В. Динамика частиц, взаимодействующих посредством скалярного поля // Вестник НовГУ. 2025. 1 (139). 108–122. DOI: 10.34680/2076-8052.2025.1(137).108-122

Research Article

DYNAMICS OF PARTICLES INTERACTING BY MEANS OF A SCALAR FIELD

Zubkov V. V.¹, Mayfat D. A.¹, Zubkova A. V.²

¹ Tver State University (Tver, Russia)

² Tver State Technical University (Tver, Russia)

Abstract. On the basis of the Lagrangian description of the system of particles and the field, the law of energy change of a system of point particles interacting with each other by means of a composite Klein-Fock-Gordon scalar field is obtained. The motion of particles was considered as nonrelativistic, while the field dynamics is always essentially relativistic in nature. It is shown that within the model of independent scalar fields the total energy of particles for the evolutionary time of the system decreases. Also the law of change of the total mechanical energy of the system of particles peculiar to classical mechanics is obtained. As an example, the double Yukawa potentials, typical for the model of simple liquids and gases, which are stable according to the Dobrushin-Ruel-Fisher criterion, are considered. It is shown that for such physically realistic potentials the rate of change of mechanical energy of particles is negative. Fundamental issues related to the research carried out, such as the phenomenon of irreversibility and the justification of Gibbs distributions, are discussed.

Keywords: *classical relativistic dynamics, retarded interactions, Klein-Gordon-Fock equation, the phenomenon of irreversibility.*

For citation: Zubkov V. V., Mayfat D. A., Zubkova A. V. Dynamics of particles interacting by means of a scalar field // Vestnik NovSU. 2025. 1 (139). 108–122. DOI: 10.34680/2076-8052.2025.1(139).108-122

Введение

В основе подавляющего большинства теоретических методов исследования систем многих частиц лежит статистическая механика, с которой связаны два принципиальных момента [1–5]: вероятностная картина эволюции системы и гамильтоновость рассматриваемой системы. Причем, что важно, под системой понимается система частиц, движение которой подчиняется законам классической механики.

Вероятностная картина основана на эргодической гипотезе, которая в общем случае не доказана, а, следовательно, использование этой гипотезы потенциально может привести к неверным результатам. В общем случае введение вероятностных гипотез в динамику классической механической системы приводит к внутренне противоречивой теории, что замечательно было проиллюстрировано в работе Каца [6]. Кац показал, что точное решение задачи о динамике дискретной кольцевой модели в рамках классической механики качественно отличается от решения, полученного с привлечением реалистических вероятностных гипотез. Это явно говорит о том, что введение вероятностных предположений может существенно исказить истинную эволюцию частиц. В связи с этим популярные на сегодняшний день попытки объяснения необратимости в рамках концепции детерминистического хаоса, призванные обосновать введение вероятностных мер, не представляют собой вполне удовлетворительное решение проблемы необратимости.

Н. Н. Боголюбов в свое время отмечал, что кинетические уравнения, записанные для упругих шаров, не могут в себе содержать явление стохастизации системы [2, с. 616–638], и что эргодическая теория требует слишком узких условий и поэтому для реальных задач физики практически не применима. Вот что он писал: *«По поводу результатов эргодической теории надо, однако, сказать, что свойства транзитивности, и в особенности перемешивания для динамических систем, рассматриваемых в статистической механике, установить чрезвычайно трудно»* [3, с. 434–435]. Боголюбов считал более реалистической причиной перехода системы к равновесию влияние термостата [3, с. 437]. Но что считать термостатом? Систему, внешнюю по отношению к исследуемой? Но каким образом тогда замкнутая система приходит к равновесию? В. Ритц в своей дискуссии с А. Эйнштейном [7] отмечал, что одной из причин необратимости является ограничения в виде запаздывающих потенциалов. Запаздывающие потенциалы являются следствием полевой теории

взаимодействия частиц. Эволюция системы «частицы + поле» определяется релятивистски-инвариантным гамильтонианом, неизбежно включающим слагаемое, обусловленное взаимодействием между частицами и полем. В классической же механике, напротив, постулируется принцип дальнего действия, а взаимодействие описывается посредством введения потенциальной энергии. Но, как показал Карри [8], в таком случае требование релятивистской инвариантности исключает возможность учета взаимодействия между частицами. Значит, статистическая механика, с её представлением о классическом нерелятивистском гамильтониане, не соответствует хорошо проверенному принципу: эволюция системы частиц происходит согласно релятивистски-инвариантному уравнению движения, включающему движение поля. Более того, исключение из рассмотрения поля означает пренебрежение бесконечным множеством полевых степеней свободы и их влиянием на динамику частиц. Здесь уместно вспомнить слова Дж. Уилера, записанные им на стене кафедры теоретической физики МГУ: *«Не может быть теории частиц, которая имеет дело лишь с частицами»*.

В работах [9–13] показано, что учет поля (и, как следствие, эффектов запаздывания взаимодействия) позволяет описать микроскопическую необратимую эволюцию системы частиц. При таком описании нет необходимости вводить вероятностные гипотезы и предположения. Все, что действительно необходимо, – это описание совместного движения частиц и поля в псевдоевклидовом пространстве-времени с учетом принципа причинности [9, 11, 12].

В работе [9] было получено кинетическое уравнение для системы частиц, взаимодействующих посредством скалярного поля типа Клейна-Фока-Гордона. В настоящей работе получено выражение для скорости изменения полной механической энергии частиц, а также изменение энергии системы частиц за время эволюции.

Уравнения движения для частиц и поля

Рассмотрим эволюцию системы «частицы + скалярное поле». Скалярное поле, посредством которого взаимодействуют частицы, зададим в виде составного поля Клейна-Фока-Гордона [14]

$$\varphi(x) = \sum_s \varphi_s(x). \quad (1)$$

Здесь $x = (ct, \mathbf{r})$ – координаты в пространстве Минковского.

Запишем действие для системы «частицы + скалярное поле» [9]:

$$S = -\sum_a m_a c \int ds_a - \sum_a \sum_s \frac{\gamma_s}{c} \int \varphi_s(x_a) ds_a + \\ + \frac{1}{2c} \sum_s \kappa_s \int d^4x (\partial_\alpha \varphi_s(x) \partial^\alpha \varphi_s(x) - \mu_s^2 \varphi_s^2(x)). \quad (2)$$

Здесь κ_s – размерная постоянная, γ_s – константа связи, μ_s – величина, характеризующая массу переносчиков взаимодействия.

Варьируя действие (2) по переменным поля, получим уравнение движения для поля

$$\square \varphi_s + \mu_s^2 \varphi_s = -\frac{\gamma_s}{\kappa_s} \sum_a \int d\tau_a \sqrt{\dot{x}^\alpha \dot{x}_\alpha} \delta^4(x - x_a(\tau_a)) = -\frac{\gamma_s c}{\kappa_s} \int \mathcal{F}(x, p) d^4p \equiv g_s(x), \quad (3)$$

решение которого, удовлетворяющее принципу причинности, может быть записано как

$$\varphi_s(x) = \int g_s(x') d^4x' \frac{c}{(2\pi)^4} \int e^{ik(r-r')} d^3\mathbf{k} \int d\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{c^2 \mu_s^2 - \omega^2 + c^2 \mathbf{k}^2 - i\epsilon c \omega}. \quad (4)$$

Здесь $d\tau_a$ – собственное время a -ой частицы, $k = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k}\right)$ – волновой 4-вектор, $\mathcal{F}(x, p)$ – микроскопическая функция распределения Стратоновича:

$$\mathcal{F}(x, p) = \sum_a \int \delta^4(x - x_a(\tau_a)) \delta^4(p - p_a(\tau_a)) d\tau_a. \quad (5)$$

Введенное в знаменателе выражения (4) слагаемое $i\epsilon c \omega$ отвечают выбору запаздывающей функции Грина, что соответствует учету принципа причинности.

Варьируя действие по переменным частиц, получим уравнения для движения частиц

$$\frac{d}{d\tau_a} \left[\left(1 + \frac{\sum_s \gamma_s \varphi_s(x_a)}{m_a c^2} \right) p_a^\nu \right] = \sum_s \gamma_s \frac{\partial \varphi_s(x_a)}{\partial x_{a\nu}}. \quad (6)$$

Пусть $\sum_s \gamma_s \varphi_s(x_a) \ll m_a c^2$. Тогда уравнение (6) можно упростить:

$$\frac{dp_a^\nu}{d\tau_a} = \sum_s \gamma_s g^{\nu\mu} \frac{\partial \varphi_s(x_a)}{\partial x_a^\mu} = f^\nu(x_a). \quad (7)$$

Здесь

$$f^\mu = (f^0, \vec{f}) = \frac{p^0}{mc} \left(\frac{v\mathbf{F}}{c}, \mathbf{F} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \sum_s \gamma_s \varphi_s(x), -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \sum_s \gamma_s \varphi_s(x) \right), \quad (8)$$

– 4-сила, $p^\alpha = (p^0, \mathbf{p})$ – 4-вектор импульса, $\mathbf{F}$ – трехмерная сила, $g^{\nu\mu}$ – тензор, обратный к метрическому тензору. В дальнейшем будем полагать, что все частицы имеют одинаковую массу $m_a = m$.

Эволюция энергии-импульса системы частиц

Найдем теперь закон изменения тензора энергии-импульса системы частиц. Умножая уравнение движения (7) на $\delta^4(x - x_a(\tau_a))$, интегрируя по времени τ_a и суммируя по a , получим

$$\sum_a \int d\tau_a \frac{dp_a^\nu}{d\tau_a} \delta^4(x - x_a(\tau_a)) = \sum_a \int d\tau_a f^\nu(x_a) \delta^4(x - x_a(\tau_a)).$$

Преобразуем левую часть равенства:

$$\begin{aligned} \sum_a \int d\tau_a \frac{dp_a^\nu}{d\tau_a} \delta^4(x - x_a(\tau_a)) &= \sum_a m_a \int d\tau_a \frac{du_a^\nu}{d\tau_a} \delta^4(x - x_a(\tau_a)) = \\ &= \partial_\mu \sum_a m_a \int d\tau_a u_a^\nu u_a^\mu \delta^4(x - x_a(\tau_a)) = \partial_\mu T_{part}^{\nu\mu}. \end{aligned}$$

Здесь

$$T_{part}^{\nu\mu} = \sum_a m_a \int d\tau_a u_a^\nu u_a^\mu \delta^4(x - x_a(\tau_a)) \quad (9)$$

– тензор энергии импульса системы частиц, u_a^ν – 4-скорость частицы. В итоге закон изменения тензора энергии-импульса имеет вид:

$$\partial_\nu T_{part}^{\nu\mu} = \sum_a \int d\tau_a f_a^\mu(x_a) \delta^4(x - x_a(\tau_a)) = g^{\nu\mu} \sum_s \gamma_s \partial_\nu \varphi_s(x) \int \mathcal{F}(x, p) d^4p. \quad (10)$$

Проинтегрируем (10) по объему, занимаемому системой частиц

$$\int d^3\mathbf{r} \partial_\nu T_{part}^{\nu\mu} = \int d^3\mathbf{r} \int f^\mu(x) \mathcal{F}(x, p) d^4p. \quad (11)$$

Учтем, что

$$\int dp^0 \mathcal{F}(x, p) = \frac{1}{c \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}}} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t). \quad (12)$$

Здесь

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \sum_a \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{p}_a(t)) \quad (13)$$

– функция распределения Климонтовича. Тогда уравнение (11) можно представить в виде:

$$\int d^3\mathbf{r} \partial_\nu T_{part}^{\nu\mu} = \int d^3\mathbf{r} \int d^3\mathbf{p} \frac{f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{c \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}}} f^\mu(x). \quad (14)$$

Интеграл по объему от дивергенции тензора энергии-импульса частиц с учетом теоремы Гаусса и предположения, что на бесконечности частицы отсутствуют, может быть представлен в следующем виде

$$\begin{aligned} \int d^3\mathbf{r} \partial_\nu T_{part}^{\nu\mu} &= \frac{1}{c} \int d^3\mathbf{r} \frac{\partial T_{part}^{0\mu}}{\partial t} - \int \text{div} T_{part} d^3\mathbf{r} = \\ &= \frac{1}{c} \int d^3\mathbf{r} \frac{\partial T_{part}^{0\mu}}{\partial t} - \oint_S T_{part}^{\nu\mu} dS_\nu = \frac{1}{c} \int d^3\mathbf{r} \frac{\partial T_{part}^{0\mu}}{\partial t} = \\ &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int d^3\mathbf{r} \sum_a \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) m u_a^\mu = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \sum_{a=1}^N m u_a^\mu. \end{aligned} \quad (15)$$

В итоге имеем

$$\frac{d}{dt} \sum_{a=1}^N m u_a^\mu = \int d^3\mathbf{r} \int d^3\mathbf{p} \frac{f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{\sqrt{1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2 c^2}}} f^\mu(x). \quad (16)$$

Если индекс μ в (16) пробегает пространственные компоненты, то уравнение (16) совпадает с законом изменения импульса системы $\sum_{a=1}^N \frac{m_a v_a}{\sqrt{1 - (\frac{v_a}{c})^2}}$. Если индекс μ соответствует нулевой компоненте 4-вектора, то мы приходим к формуле для закона изменения полной энергии системы частиц $\sum_{a=1}^N \frac{m_a c^2}{\sqrt{1 - (\frac{v_a}{c})^2}}$. В последнем случае уравнение (16) принимает вид:

$$\frac{d}{dt} \sum_{a=1}^N \frac{m c^2}{\sqrt{1 - (\frac{v_a}{c})^2}} = c \int d^3\mathbf{r} \int d^3\mathbf{p} \frac{f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{\sqrt{1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2 c^2}}} f^0(x). \quad (17)$$

Так как $f^0 = \frac{\mathbf{p} \mathbf{F}}{m c}$, то уравнение (17) можно представить в виде

$$\frac{d}{dt} \sum_{a=1}^N \frac{m c^2}{\sqrt{1 - (\frac{v_a}{c})^2}} = \int d^3\mathbf{r} \int d^3\mathbf{p} \frac{f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{\sqrt{1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2 c^2}}} \frac{\mathbf{p} \mathbf{F}}{m} = - \sum_s \gamma_s \int d^3\mathbf{r} \int d^3\mathbf{p} \frac{f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2 c^2}} \frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial \varphi_s(x)}{\partial \mathbf{r}}. \quad (18)$$

С другой стороны, с учетом $f^0 = \frac{\partial}{c \partial t} \sum_s \gamma_s \varphi_s(x)$ уравнению (17) можно придать другой вид:

$$\frac{d}{dt} \sum_{a=1}^N \frac{m c^2}{\sqrt{1 - (\frac{v_a}{c})^2}} = \sum_s \gamma_s \int d^3\mathbf{r} \int d^3\mathbf{p} \frac{f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{\sqrt{1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2 c^2}}} \frac{\partial \varphi_s(x)}{\partial t}. \quad (19)$$

Выражения (18) и (19) для скорости изменения полной энергии частиц полностью эквивалентны, и использование той или другой формы записи диктуется удобством ее использования при решении поставленной задачи.

Эволюция энергии системы частиц

С учетом выражения для поля (4) скорость изменения энергии системы частиц (19) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{a=1}^N \frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v_a}{c}\right)^2}} &= \frac{ic^2}{(2\pi)^4} \sum_s \frac{\gamma_s^2}{\kappa_s} \int d^3\mathbf{r} \int d^3\mathbf{p} \frac{f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{\sqrt{1+\frac{\mathbf{p}^2}{m^2c^2}}} \times \\ &\times \int dt' \int \int \frac{f(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t')}{\sqrt{1+\frac{\mathbf{p}'^2}{m^2c^2}}} d^3\mathbf{r}' d^3\mathbf{p}' \int e^{ik(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} d^3\mathbf{k} \int \frac{\omega e^{-i\omega(t-t')} d\omega}{c^2\mu_s^2 - \omega^2 + c^2\mathbf{k}^2 - i\epsilon c\omega}. \end{aligned} \quad (20)$$

С учетом принципа причинности вычисление интеграла по ω приводит к следующему выражению:

$$\int d\omega \frac{\omega e^{-i\omega(t-t')}}{c^2\mu_s^2 - \omega^2 + c^2\mathbf{k}^2 - i\epsilon c\omega} = 2\pi i \cos\left(c\sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu_s^2}(t-t')\right).$$

С учетом этого из (20) следует выражение для приращения энергии частиц за все время эволюции нерелятивистских частиц:

$$\begin{aligned} \Delta\left(\sum_{a=1}^N \frac{mv_a^2}{2}\right) &= -\frac{2\pi c^2}{(2\pi)^4} \sum_s \frac{\gamma_s^2}{\kappa_s} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^t dt' \tilde{\rho}(\mathbf{k}, t') \times \\ &\times \int \tilde{\rho}(-\mathbf{k}, t) \cos\left(c\sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu_s^2}(t-t')\right) d^3\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь $\tilde{\rho}(\mathbf{k}, t)$ – фурье-образ локальной плотности $\rho(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3\mathbf{p}$. Далее, заметим, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^t dt' \tilde{\rho}(\mathbf{k}, t') \tilde{\rho}(-\mathbf{k}, t) \cos\left(c\sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu_s^2}(t-t')\right) &= \\ = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \left[\int_{-\infty}^t dt' \tilde{\rho}(\mathbf{k}, t') \tilde{\rho}(-\mathbf{k}, t) \cos\left(c\sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu_s^2}(t-t')\right) + \right. \\ \left. + \int_t^{\infty} dt' \tilde{\rho}(\mathbf{k}, t) \tilde{\rho}(-\mathbf{k}, t') \cos\left(c\sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu_s^2}(t-t')\right) \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

В статическом случае уравнение Клейна-Фока-Гордона (3) принимает вид уравнения Гельмгольца, общее решение которого представляет сумму потенциалов Юкавы. Фурье-образ потенциалов Юкавы является четной функцией аргумента $\mathbf{k}$. Это позволяет положить, что $\tilde{\rho}(\mathbf{k}, t)$ в уравнении (21) является четной функцией аргумента $\mathbf{k}$. В этом случае (22) примет вид

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^t dt' \tilde{\rho}(\mathbf{k}, t') \tilde{\rho}(-\mathbf{k}, t) \cos\left(c\sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu_s^2}(t-t')\right) &= \\ = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' \tilde{\rho}(\mathbf{k}, t') \tilde{\rho}(-\mathbf{k}, t) \cos\left(c\sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu_s^2}(t-t')\right). \end{aligned}$$

Учитывая полученное соотношение, уравнение (21) можно представить в симметризованном виде

$$\Delta \left(\sum_{a=1}^N \frac{mv_a^2}{2} \right) = -\frac{\pi c^2}{(2\pi)^4} \sum_s \frac{\gamma_s^2}{\kappa_s} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' \tilde{\rho}(\mathbf{k}, t') \times \\ \times \int \tilde{\rho}(-\mathbf{k}, t) \cos \left(c\sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu_s^2} (t - t') \right) d^3 \mathbf{k}. \quad (23)$$

Интеграл по переменной t' представим в виде интеграла Фурье:

$$I(\mathbf{k}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \tilde{\rho}(\mathbf{k}, t') \cos \left(c\sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu_s^2} (t - t') \right) = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{I}(\mathbf{k}, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega.$$

Вычисляя Фурье-образ $\tilde{I}(\mathbf{k}, \omega)$

$$\tilde{I}(\mathbf{k}, \omega) = \pi \tilde{\rho}(\mathbf{k}, \omega) [\delta(\omega + c\sqrt{\mu_s^2 + \mathbf{k}^2}) + \delta(\omega - c\sqrt{\mu_s^2 + \mathbf{k}^2})],$$

получим окончательное выражение для скорости изменения кинетической энергии частиц:

$$\Delta \left(\sum_{a=1}^N \frac{mv_a^2}{2} \right) = -\frac{c^2}{32\pi^3} \sum_s \frac{\gamma_s^2}{\kappa_s} \int d^3 \mathbf{k} \left[|\tilde{\rho}(\mathbf{k}, -c\sqrt{\mu_s^2 + \mathbf{k}^2})|^2 + |\tilde{\rho}(\mathbf{k}, c\sqrt{\mu_s^2 + \mathbf{k}^2})|^2 \right]. \quad (24)$$

$$\text{Здесь } \tilde{\rho}(\mathbf{k}, \omega) = \int dt' \int d^3 \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', t') e^{i\omega t'} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}'}.$$

В случае независимых скалярных полей φ_s все константы κ_s должны быть положительными. В этом случае кинетическая энергия системы частиц убывает. В общем же случае единого составного поля (1) не все константы κ_s обязаны быть положительными. Требуется лишь неотрицательность энергии составного поля:

$$E = \frac{1}{2c} \sum_s \kappa_s \left(\left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial t} \right)^2 + (\nabla \varphi_s)^2 + \mu_s^2 \varphi_s^2 \right).$$

В статическом пределе составное поле может отвечать, например, двойному потенциалу Юкавы, который качественно соответствует типичному межатомному потенциалу в модели простых жидкостей и газов [15]. В этом случае одна из двух констант обязательно отрицательна. При этом анализ изменения энергии частиц (24) затруднён в силу того, что заранее зависимость $\tilde{\rho}(\mathbf{k}, c\sqrt{\mu_s^2 + \mathbf{k}^2})$ от μ_s неизвестна.

Эволюция полной механической энергии системы частиц

Известно, что решение (4) можно представить в виде [16]

$$\varphi_s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{g_s \left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c} \right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}' - \\ - \frac{\mu_s}{4\pi} \int_0^\infty d\xi \int g_s \left(\mathbf{r}', t - \frac{\sqrt{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 + \xi^2}}{c} \right) \frac{J_1(\mu_s \xi)}{\sqrt{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2 + \xi^2}} d^3 \mathbf{r}'. \quad (25)$$

Это решение соответствует полевой природе взаимодействия частиц, что математически выражается в наличии в этом выражении семейства времен запаздывания взаимодействия $\tau = \frac{1}{c} \sqrt{\xi^2 + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}$. В отличие от безмассового электромагнитного поля времен запаздывания для массивного скалярного поля бесконечно много (величина ξ пробегает значения в диапазоне от нуля до бесконечности), что отвечает лежащим в пределах от нуля до скорости света c скоростям массивных частиц-переносчиков взаимодействия [16]. Это значит, что величина поля в некоторой точке пространства Минковского зависит, вообще говоря, от всей предыстории эволюции системы. Введем время запаздывания $\tau_r = \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}$, отвечающее передачи взаимодействия со скоростью света, и перепишем второй интеграл в правой части (25)

$$\int_0^{+\infty} d\xi \frac{J_1(\mu_s \xi)}{\sqrt{\xi^2 + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}} g_s(\mathbf{r}', t - \frac{1}{c} \sqrt{\xi^2 + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}) = \int_{\tau_r}^{+\infty} d\tau \frac{J_1(\mu_s c \sqrt{\tau^2 - \tau_r^2})}{\sqrt{\tau^2 - \tau_r^2}} g_s(\mathbf{r}', t - \tau).$$

В силу характера изменения подынтегральной функции (достаточно быстрое убывание с осциллированием) можно рассмотреть случай, когда поле в некоторой точке наблюдения в момент времени t обусловлено излучением в интервале времени $(t - \mathcal{N}\tau_r, t - \tau_r)$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_{\tau_r}^{+\infty} d\tau \frac{J_1(\mu_s c \sqrt{\tau^2 - \tau_r^2})}{\sqrt{\tau^2 - \tau_r^2}} g_s(\mathbf{r}', t - \tau) \approx \\ & \approx \int_{\tau_r}^{\mathcal{N}\tau_r} d\tau \frac{J_1(\mu_s c \sqrt{\tau^2 - \tau_r^2})}{\sqrt{\tau^2 - \tau_r^2}} \left(g_s(\mathbf{r}', t) - \tau \frac{\partial g_s(\mathbf{r}', t)}{\partial t} \right) = \\ & = g_s(\mathbf{r}', t) \int_{\tau_r}^{\mathcal{N}\tau_r} d\tau \frac{J_1(\mu_s c \sqrt{\tau^2 - \tau_r^2})}{\sqrt{\tau^2 - \tau_r^2}} - \frac{\partial g_s(\mathbf{r}', t)}{\partial t} \int_{\tau_r}^{\mathcal{N}\tau_r} d\tau \frac{J_1(\mu_s c \sqrt{\tau^2 - \tau_r^2})}{\sqrt{\tau^2 - \tau_r^2}} \tau. \end{aligned}$$

Здесь $\mathcal{N}$ – число времен $\tau_r = \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}$. Первый интеграл в силу быстрого убывания подынтегральной функции может быть с большой степенью точности представлен в виде

$$\int_{\tau_r}^{\mathcal{N}\tau_r} d\tau \frac{J_1(\mu_s c \sqrt{\tau^2 - \tau_r^2})}{\sqrt{\tau^2 - \tau_r^2}} \approx \lim_{\mathcal{N} \rightarrow \infty} \int_{\tau_r}^{\mathcal{N}\tau_r} d\tau \frac{J_1(\mu_s c \sqrt{\tau^2 - \tau_r^2})}{\sqrt{\tau^2 - \tau_r^2}} = \frac{1}{\mu_s |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{e^{-\mu_s |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{\mu_s |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (26)$$

Второй интеграл может быть вычислен точно:

$$\int_{\tau_r}^{\mathcal{N}\tau_r} d\tau \frac{J_1\left(\mu_s c \sqrt{\tau^2 - \tau_r^2}\right)}{\sqrt{\tau^2 - \tau_r^2}} \tau = \frac{1}{\mu_s c} [1 - J_0(\mu_s |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \sqrt{\mathcal{N} - 1})]. \quad (27)$$

Раскладывая первое слагаемое в выражении (25) по времени запаздывания τ_r и ограничиваясь двумя членами разложения, а также учитывая (26) и (27), запишем (25) в виде:

$$\varphi_s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi \kappa_s} \int g_s(\mathbf{r}', t) \frac{e^{-\mu_s |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}' - \frac{1}{4\pi c \kappa_s} \int \frac{\partial g_s(\mathbf{r}', t)}{\partial t} J_0(\mu_s |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \sqrt{\mathcal{N} - 1}) d^3 \mathbf{r}'. \quad (28)$$

Подставляя (28) в (18) запишем скорость изменения кинетической энергии

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum_{a=1}^N \frac{mv_a^2}{2} &= \frac{1}{4\pi} \sum_s \frac{\gamma_s^2}{\kappa_s} \int d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{p} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int \rho(\mathbf{r}', t) \frac{e^{-\mu_s |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 \mathbf{r}' - \\ &- \frac{1}{4\pi c} \sum_s \frac{\gamma_s^2}{\kappa_s} \int d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{p} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t)}{\partial t} J_0(\mu_s |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \sqrt{\mathcal{N} - 1}) d^3 \mathbf{r}'. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части полученного уравнения можно привести к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi} \sum_s \frac{\gamma_s^2}{\kappa_s} \iint d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{p} \iint d^3 \mathbf{r}' d^3 \mathbf{p}' \frac{f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{m} (\mathbf{p} - \mathbf{p}') \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{e^{-\mu_s |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} f(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t) = \\ = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum_s \frac{\gamma_s^2}{4\pi \kappa_s} \sum_a \sum_b \frac{e^{-\mu_s |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|}}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} \equiv -\frac{dU}{dt}. \end{aligned}$$

Здесь мы ввели свойственное классической механике понятие потенциальной энергии

$$U = -\frac{1}{2} \sum_s \frac{\gamma_s^2}{4\pi \kappa_s} \sum_a \sum_b \frac{e^{-\mu_s |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|}}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|}. \quad (29)$$

Таким образом, из закона изменения кинетической энергии следует закон изменения полной механической энергии системы частиц

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\sum_{a=1}^N \frac{mv_a^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_s \frac{\gamma_s^2}{4\pi \kappa_s} \sum_a \sum_b \frac{e^{-\mu_s |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|}}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} \right) = \\ = -\frac{1}{4\pi c} \sum_s \frac{\gamma_s^2}{\kappa_s} \int d^3 \mathbf{r} d^3 \mathbf{p} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \frac{\mathbf{p}}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t)}{\partial t} J_0(\mu_s |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \sqrt{\mathcal{N} - 1}) d^3 \mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (30)$$

Для дальнейшего анализа преобразуем интеграл в правой части полученного равенства. Для этого сначала заметим, что

$$\int d^3 \mathbf{p} \frac{\mathbf{p}}{m} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \sum_a \frac{\mathbf{p}_a}{m} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t), \quad (31)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}', t) = -\text{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}', t). \quad (32)$$

Здесь $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ – вектор плотности потока частиц.

Тогда интеграл в правой части равенства (30) примет вид

$$\begin{aligned} \iint d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{p} \frac{f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{m} \mathbf{p} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t)}{\partial t} J_0(\mu_s |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \sqrt{\mathcal{N} - 1}) d^3\mathbf{r}' = \\ = \int d^3\mathbf{r} j_\alpha(\mathbf{r}, t) \int \frac{\partial^2 J_0(\mu_s |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \sqrt{\mathcal{N} - 1})}{\partial x_\alpha \partial x'_\beta} j_\beta(\mathbf{r}', t) d^3\mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (33)$$

Записав функцию Бесселя J_0 в форме интеграла Фурье

$$J_0(\mu_s |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \sqrt{\mathcal{N} - 1}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \tilde{J}_0(\mathbf{k}; \mu_s) e^{-i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}, \quad (34)$$

представим искомый интеграл (33) в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \tilde{J}_0(\mathbf{k}; \mu_s) k_\alpha k_\beta \int j_\alpha(\mathbf{r}, t) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \int \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}') j_\beta(\mathbf{r}', t) d^3\mathbf{r}' = \\ = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \tilde{J}_0(\mathbf{k}; \mu_s) k_\alpha k_\beta \tilde{j}_\alpha^*(\mathbf{k}, t) \tilde{j}_\beta(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} |\mathbf{k} \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{k}, t)|^2 \tilde{J}_0(\mathbf{k}; \mu_s). \end{aligned}$$

Следовательно, скорость изменения полной механической энергии равна

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\sum_{a=1}^N \frac{mv_a^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_s \frac{\gamma_s^2}{4\pi\kappa_s} \sum_a \sum_b \frac{e^{-\mu_s |r_a - r_b|}}{|r_a - r_b|} \right) = \\ = - \frac{1}{4\pi c} \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_s \frac{\gamma_s^2}{\kappa_s} \int d^3\mathbf{k} |\mathbf{k} \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{k}, t)|^2 \tilde{J}_0(\mathbf{k}; \mu_s). \end{aligned} \quad (35)$$

Образ $\tilde{J}_0(\mathbf{k}; \mu_s)$ может быть вычислен аналитически:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_0(\mathbf{k}; \mu_s) = \int d^3\mathbf{R} J_0(\mu_s R \sqrt{\mathcal{N} - 1}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}} = \frac{4\pi}{k} \int_0^\infty J_0(\mu_s R \sqrt{\mathcal{N} - 1}) \sin(kR) R dR = \\ = 4\pi (\mu_s^2 (\mathcal{N} - 1) - k^2)_+^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Здесь $(\mu^2 (\mathcal{N} - 1) - k^2)_+^{-\frac{3}{2}} = \frac{H(\mu\sqrt{\mathcal{N}-1}-k)}{(\mu^2(\mathcal{N}-1)-k^2)^{\frac{3}{2}}}$ – обобщённая степенная функция [17].

В результате закон изменения полной механической энергии частиц, взаимодействующих посредством скалярного поля Клейна-Фока-Гордона принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\sum_{a=1}^N \frac{mv_a^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_s \frac{\gamma_s^2}{4\pi\kappa_s} \sum_a \sum_b \frac{e^{-\mu_s |r_a - r_b|}}{|r_a - r_b|} \right) = \\ = - \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{c} \sum_s \frac{\gamma_s^2}{\kappa_s} \int d^3\mathbf{k} |\mathbf{k} \tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{k}, t)|^2 (\mu_s^2 (\mathcal{N} - 1) - \mathbf{k}^2)_+^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned} \quad (36)$$

Как видно из полученного выражения, скорость изменения механической энергии определяется параметрами $\mathcal{A}_s = \frac{\gamma_s^2}{\kappa_s}$ и μ_s . В частном случае, когда s пробегает два значения, и при этом $\mathcal{A}_1 = B > 0$, а $\mathcal{A}_2 = -A < 0$, статическое поле (29) называют двойным потенциалом Юкавы [15]:

$$U(r) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{A}_1 e^{-\mu_1 r}}{4\pi r} + \frac{\mathcal{A}_2 e^{-\mu_2 r}}{4\pi r} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{A e^{-\mu_2 r}}{4\pi r} - \frac{B e^{-\mu_1 r}}{4\pi r} \right).$$

Такой потенциал соответствует типичному межатомному потенциалу в модели простых жидкостей и газов. В этом случае скорость изменения полной механической энергии определяется знаком суммы

$$-\sum_s \mathcal{A}_s \frac{H(\mu_s \sqrt{\mathcal{N}-1}-k)}{(\mu_s^2(\mathcal{N}-1)-k^2)^{\frac{3}{2}}} = A \frac{H(\mu_2 \sqrt{\mathcal{N}-1}-k)}{(\mu_2^2(\mathcal{N}-1)-k^2)^{\frac{3}{2}}} - B \frac{H(\mu_1 \sqrt{\mathcal{N}-1}-k)}{(\mu_1^2(\mathcal{N}-1)-k^2)^{\frac{3}{2}}},$$

который для устойчивых потенциалов, т. е. когда выполняется условие Добрушина-Рюэля-Фишера [15, 18]

$$\frac{B}{A} < \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 < 1,$$

является отрицательным во всем диапазоне k . Следовательно, полная механическая энергия частиц со временем убывает, причем монотонно.

Заключение

Основные положения и выводы настоящей работы состоят в следующем.

- Получено выражение для изменения энергии частиц, взаимодействующих посредством скалярного поля Клейна-Фока-Гордона, за все время эволюции.
- Получено выражение для скорости изменения полной механической энергии частиц, которая используется при вычислении вероятностей той или иной микроскопической реализации макроскопического состояния в рамках микроканонического ансамбля. Показано, что эта энергия со временем убывает. Это значит, что положение, лежащее в основе представления о микроканоническом ансамбле, о том, что изображающая точка движется на поверхности постоянной энергии системы частиц, требует дополнительного обоснования. Несомненно однако то, что окончательный ответ должен зависеть от граничных условий, накладываемых на поле.
- Анализ выражения (36) показывает, что одной из возможных причин необратимого поведения системы частиц может быть нетривиальный энергетический обмен между системой частиц и полем, посредством которого частицы взаимодействуют друг с другом. Этот вывод согласуется с результатами предыдущих исследований [9–13].

Список литературы

1. Боголюбов Н. Н. Собрание научных трудов: в 12 томах. Т. 5: Неравновесная статистическая механика, 1939–1980 / под ред. Н. М. Плакиды, А. Д. Суханова. Москва: Наука, 2006. 804 с.
2. Боголюбов Н. Н. Собрание научных трудов: в 12 томах. Т. 6: Равновесная статистическая механика, 1945–1986 / под ред. Н. М. Плакиды, А. Д. Суханова. Москва: Наука, 2006. 519 с.
3. Kreuzer H. J. Non-equilibrium thermodynamics and its statistical foundations. Oxford: Oxford University Press, 1981. 458 p.
4. Уленбек Дж., Форд Дж. Лекции по статистической механике / пер. с англ., под ред. И. А. Квасникова. Москва: Мир, 1965. 308 с.
5. Мартынов Г. А. Классическая статистическая механика. Теория жидкостей. Долгопрудный: Издательский дом «Интеллект», 2014. 328 с.
6. Кас М. Some remarks on the use of probability in classical statistical mechanics // *Bulletins de l'Académie Royale de Belgique*. 1956. 42. 356–361.
7. Ritz W., Einstein A. Zum gegenwärtigen Stand des Strahlungsproblems // *Physikalische Zeitschrift*. 1909. 10 (9). 323–324.
8. Currie D. G. Interaction contra classical relativistic hamiltonian particle mechanics // *Journal of Mathematical Physics*. 1963. 4. 1470–1488.
9. Zakharov A. Yu., Zubkov V. V. Field-theoretical representation of interactions between particles: classical relativistic probability-free kinetic theory // *Universe*. 2022. 8 (5). 281. DOI: 10.3390/universe8050281
10. Zakharov A. Yu. Determinism vs. statistics in classical many-body theory: Dynamical origin of irreversibility // *Physics Letters A*. 2017. 473. 72–76. DOI: 10.1016/j.physa.2017.01.005
11. Zakharov A. Y., Zubkov V. V. Toward a relativistic microscopic substantiation of thermodynamics: classical relativistic many-particle dynamics // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. 2052. 012054. DOI: 10.1088/1742-6596/2052/1/012054
12. Zakharov A. Y., Zubkov V. V. Toward a relativistic microscopic substantiation of thermodynamics: the equilibration mechanism // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. 2052. 012055. DOI: 10.1088/1742-6596/2052/1/012055
13. Zakharov A. Y., Zakharov M. A. Microscopic dynamic mechanism of irreversible thermodynamic equilibration of crystals // *Quantum Reports*. 2021. 3. 724–730. DOI: 10.3390/quantum3040045
14. Косяков Б. П. Введение в классическую теорию частиц и полей. Ижевск: Издательство «Институт компьютерных исследований», 2017. 656 с.
15. Локтионов И. К. Применение уравнения состояния однокомпонентных систем с модифицированными потенциалами Юкавы к изучению некоторых теплофизических свойств простых веществ // *Физика и техника высоких давлений*. 2011. 21 (3). 14–26.
16. Иваненко Д. Д., Соколов А. А. Классическая теория поля. Москва, Ленинград: ГИТТЛ, 1951. 480 с.
17. Гельфанд И. М., Шилев Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. Москва: Добросвет, 2000. 412 с.

18. Baus M., Tejero C. F. Equilibrium statistical physics. Phases of matter and phase transitions. Berlin: Springer, 2008. 374 p.

References

1. Bogolyubov N. N. Collection of scientific works: in 12 vols. Vol. 5: Nonequilibrium statistical mechanics // ed. N. M. Plakida, A. D. Sukhanov. Moscow: Nauka Publ., 2005. 804 p. (In Russian).
2. Bogolyubov N. N. Collection of scientific works: in 12 vols. Vol. 6: Equilibrium statistical mechanics // ed. N. M. Plakida, A. D. Sukhanov. Moscow: Nauka Publ., 2006. 519 p. (In Russian).
3. Kreuzer H. J. Non-Equilibrium Thermodynamics and its statistical foundations. Oxford: Oxford University Press, 1981. 458 p.
4. Uhlenbeck G. E., Ford G. W. Lectures in statistical mechanics // trans. from eng., ed. I. A. Krasnikov. Moscow: Mir Publ., 1965. 307 p. (In Russian).
5. Martynov G. A. Classical statistical mechanics. Theory of fluids. Dolgoprudnyi: Publishing house "Intellect", 2014. 328 p. (In Russian).
6. Kac M. Some remarks on the use of probability in classical statistical mechanics // *Bulletins de l'Académie Royale de Belgique*. 1956. 42. 356–361.
7. Ritz W., Einstein A. Zum gegenwärtigen Stand des Strahlungsproblems // *Physikalische Zeitschrift*. 1909. 10 (9). 323–324. (In German).
8. Currie D. G. Interaction contra classical relativistic hamiltonian particle mechanics // *Journal of Mathematical Physics*. 1963. 4. 1470–1488.
9. Zakharov A. Yu., Zubkov V. V. Field-theoretical representation of interactions between particles: classical relativistic probability-free kinetic theory // *Universe*. 2022. 8 (5). 281. DOI: 10.3390/universe8050281
10. Zakharov A. Yu. Determinism vs. statistics in classical many-body theory: Dynamical origin of irreversibility // *Physics Letters A*. 2017. 473. 72–76. DOI: 10.1016/j.physa.2017.01.005
11. Zakharov A. Y., Zubkov V. V. Toward a relativistic microscopic substantiation of thermodynamics: classical relativistic many-particle dynamics // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. 2052. 012054. DOI: 10.1088/1742-6596/2052/1/012054
12. Zakharov A. Y., Zubkov V. V. Toward a relativistic microscopic substantiation of thermodynamics: the equilibration mechanism // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. 2052. 012055. DOI: 10.1088/1742-6596/2052/1/012055
13. Zakharov A. Y., Zakharov M. A. Microscopic dynamic mechanism of irreversible thermodynamic equilibration of crystals // *Quantum Reports*. 2021. 3. 724–730. DOI: 10.3390/quantum3040045
14. Kosyakov B. P. Introduction to the classical theory of particles and fields. Izhevsk: Publishing House "Institute of Computer Research", 2017. 656 p. (In Russian).
15. Loktionov I. K. The application of the equation of state of one-component systems with the modified yukawa potentials to studying some thermal properties of simple substances // *High-pressure physics and engineering*. 2011. 21. 14–26. (In Russian).
16. Ivanenko D. D., Sokolov A. A. Classical field theory. Moscow, Leningrad: GITTL, 1951. 480 p. (In Russian).

17. Gel'fand I. M., Shilov G. E. Generalized functions. Properties and operations. Moscow: Dobrosvet Publ., 2000. 412 p. (In Russian).
18. Baus M., Tejero C. F. Equilibrium statistical physics. Phases of matter and phase transitions. Berlin: Springer, 2008. 374 p.

Информация об авторах

Зубков Виктор Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент, Тверской государственный университет (Тверь, Россия), ORCID: 0000-0003-0745-7807, Zubkov.VV@tversu.ru

Майфат Денис Александрович – студент, Тверской государственный университет (Тверь, Россия), ORCID: 0009-0005-2157-9394, mayfatina_of@mail.ru

Зубкова Анна Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент, Тверской государственный технический университет (Тверь, Россия), ORCID: 0009-0002-4368-4783, petrenko.anyu@mail.ru