РАДИОТЕХНИКА И СВЯЗЬ

УДК 621.396:621.396.677:517.956.27 ГРНТИ 47.45.39+27.17.29
DOI: 10.34680/2076-8052.2024.3(137).498-506 Специальность ВАК 2.2.13; 1.3.8
Поступила в редакцию / Received 22.09.2024 Принята к публикации / Accepted 08.11.2024

Научная статья

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВИБРАТОРНЫХ АНТЕНН В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

Эминов С. И., Сочилин А. В.

Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого (Великий Новгород, Россия)

Аннотация Изучены обратные задачам теории антенн, в которых определяются поверхностные токи по заданной диаграмме направленности. Нахождение аксиальных и азимутальных токов основано на решении операторных уравнений с малым параметрам. Для определения азимутальных токов используется интегральный оператор с логарифмической особенностью в ядре, который выполняет роль главного оператора. А для определения аксиальных токов применяется гиперсингулярный интегро-дифференциальный оператор. Применение этих операторов позволяет определить поверхностные токи с нужным поведением на границе. Плотность аксиальных токов при приближении к границе обращается в нуль по корневому закону, а плотность азимутальных токов стремится к бесконечности. Главные операторы уравнений с малым параметром непрерывны и непрерывно обратимы в пространствах Соболева. Поэтому операторные уравнения с малым параметром эквивалентны уравнениям Фредгольма второго рода. Рассмотрен пример численного расчета.
Ключевые слова: *диаграмма направленности, обратные задачи теории антенн, аксиальные токи, азимутальные токи, главные операторы, реализуемость диаграммы направленности*

Для цитирования: Эминов С. И., Сочилин А. В. Обратные задачи теории цилиндрических вибраторных антенн в пространствах Соболева // Вестник НовГУ. 2024. 3 (137). 498-506. DOI: 10.34680/2076-8052.2024.3(137).498-506

Research Article

INVERSE PROBLEMS OF THE THEORY OF CYLINDRICAL DIPOLE ANTENNAS IN SOBOLEV SPACES

Eminov S. I., Sochilin A. V.

Yaroslav-the-Wise Novgorod State University (Veliky Novgorod, Russia)

Abstract The inverse problems of antenna theory have been studied, in which surface currents are determined according to a given radiation pattern. The determination of axial and azimuthal currents is based on the solution of operator equations with small parameters.
To determine azimuthal currents, an integral operator with a logarithmic feature in the core is used, which acts as the main operator. And a hypersingular integro-differential operator is used to determine axial currents. The use of these operators makes it possible to determine surface currents with the desired behavior at the boundary. The density of axial currents when approaching the boundary vanishes according to the root law, and the density of azimuthal currents tends to infinity.
The main operators of equations with a small parameter are continuous and continuously invertible in Sobolev spaces. Therefore, operator equations with a small parameter are equivalent to Fredholm equations of the second kind. An example of numerical calculation is considered.

Keywords: *radiation pattern, inverse problems of antenna theory, axial currents, azimuthal currents, main operators, feasibility of the directional diagram*

For citation: Eminov S. I., Sochilin A. V. Inverse problems of the theory of cylindrical dipole antennas in Sobolev spaces // Vestnik NovSU. 2024. 3 (137). 498-506. DOI: 10.34680/2076-8052.2024.3(137).498-506

Введение

Обратные задачи теории антенн, задачи нахождения поверхностных токов по заданной диаграмме направленности относятся к некорректным, неустойчивым задачам. Они описываются интегральными уравнениями первого рода. В течение долгого времени представлялось проблемным решение подобных задач. Ситуация начала меняться с появлением и развитием математических методов решения уравнений первого рода. В основе ряда методов лежит замена операторного уравнения первого рода на уравнение второго рода с малым параметром. Однако непосредственное применение этих методов не позволяло находить поверхностные токи с требуемым свойством на границе. С другой стороны, получили широкое развитие математические методы решения интегральных уравнений теории дифракции электромагнитных волн на незамкнутых поверхностях. Эти методы позволяют находить поверхностные токи прямых задач теории вибраторных антенн с нужным поведением на границе. Поверхностные токи удовлетворяют условиям Мейкснера на ребре. Представляется перспективным сочетание математических методов решения некорректных задач и методов решения прямых задач теории антенн.

Диаграмма направленности заданных поверхностных токов

Связь между диаграммой направленности $\vec{F}(F_\theta, F_\varphi)$ и поверхностным током $\vec{J}$ выражается соотношениями [1,2]:

$$F_\theta(\theta,\varphi) = \iint \left(\vec{J}, \vec{t}_\theta\right) exp(ik\rho cos\gamma) dS, \tag{1}$$

$$F_\varphi(\theta,\varphi) = \iint \left(\vec{J}, \vec{t}_\varphi\right) exp(ik\rho cos\gamma) dS \tag{2}$$

$$\rho cos\gamma = xcos\varphi sin\theta + ysin\varphi sin\theta + zcos\theta \tag{3}$$

Здесь интегрирование проводится по поверхности S, k –волновое число, ρ –расстояние между началом системы координат и точкой излучения на поверхности S, (x, y, z) –координаты точки излучения, (R, θ, φ) – координаты точки наблюдения в сферической системе координат, $\vec{t}_\theta, \vec{t}_\varphi$ –орты сферической системы координат, γ –угол между направлениями на точку излучения и точку наблюдения.

Выражения (1)-(3) позволяют найти диаграмму направленности по известным поверхностным токам. В качестве примера рассмотрим отрезок круговой цилиндрической поверхности. В цилиндрических координатах поверхность S задается соотношениями: $r = a, 0 \le \varphi \le 2\pi, -l \le z \le l$. Предположим, что токи текут параллельно оси oz и не зависят от азимутальной координаты φ :$\vec{J} = \vec{t}_z j_z(z)$.

Осуществляя интегрирование по переменной φ в выражении (1) и учитывая интегральное представление функции Бесселя целого индекса [3]:

$$J_n(x) = \frac{i^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} exp(ixcos\varphi + in\varphi)\, d\varphi, \tag{4}$$

получим диаграмму направленности

$$F_\theta(\theta) = sin\theta J_0(kasin\theta)\int_0^{2\pi} j_z(z)exp(ikzcos\theta)\, dz, \tag{5}$$

А теперь предположим, что токи направлены по азимутальной координате: $\vec{j} = \vec{t}_\varphi j_z(z)$ и также не зависят от переменной φ. Произведя интегрирование по переменной φ в выражении (2), получим

$$F_\varphi(\theta) = J_1(kasin\theta)\int_0^{2\pi} j_\varphi(z)exp(ikzcos\theta)\, dz. \tag{6}$$

Формулы (5) и (6) представляют прямую задачу теории антенн и позволяют найти диаграмму направленности по известным поверхностным токам.

Постановка обратных задач теории вибраторных антенн

Предположим, что известна диаграмма направленности $F_\theta(\theta)$ и требуется найти плотность поверхностных токов $j_z(z)$. Тогда соотношение (5) можно рассмотреть как уравнение относительно $j_z(z)$. После замены $x = cos\theta$ это уравнение можно записать в виде

$$(Kj)(x) \equiv \int_{-1}^{1} j(t)exp(ikltx)dt = F(x), -1 \le x \le 1. \tag{7}$$

К уравнению (7) также приводится соотношение (6) лишь с отличающейся правой частью. Ядро интегрального уравнения (7) является вполне непрерывным, например, в пространстве квадратично суммируемых функций $L_2[-1,1]$ и уравнение (7) представляет интегральное уравнение первого рода. По этой причине не для произвольной правой части уравнение (7) имеет решение, или не всякая диаграмма направленности реализуема [4,5]. В связи с этим ставится задача нахождения поверхностных токов j, которые реализуют близкую диаграмму и имеют как можно меньшую норму в гильбертовом пространстве H. Иначе требуется минимизировать функционал

$$N(j) = \alpha\|j\|^2 + (Kj - F, Kj - F) \tag{8}$$

где α –малый параметр, $(\cdot,\cdot)$ –скалярное произведение в пространстве $L_2[-1,1]$, а $\|j\|$ –норма в пространстве H, которая определяется с помощью некоторого положительного оператора A: $\|j\|^2 = (Aj, j)$. Далее покажем, что минимум функционала $N(j)$ достигается на решениях уравнения

$$\alpha Aj + K^*Kj = K^*F. \tag{9}$$

Пусть j – решение уравнение (9), а h – произвольный элемент из пространства H. Рассмотрим разность

$$N(j+h) - N(j) = \alpha[j+h, j+h] + (Kj + Kh - F, Kj + Kh - F) -$$
$$-\alpha[j,j] - (Kj - F, Kj - F)$$

и преобразуем с учетом определения сопряженного оператора

$$N(j+h) - N(j) = \alpha[h,h] + (Kh, Kh) + (h, \alpha Aj + K^*Kj - K^*F) +$$
$$+(\alpha Aj + K^*Kj - K^*F, h).$$

Учитывая, что j – решение уравнения (9), отсюда получим

$$N(j+h) = N(j) + \alpha[h,h] + (Kh, Kh).$$

Так как в последнем соотношении второе и третье слагаемые неотрицательны, то функционал $N(j)$ достигает минимума на решениях уравнения (9).

Обратимся к уравнению (9). Оператор $T = K^*K$ является самосопряженным и положительным. Если оператор A единичный или положительно определенный, то уравнение (9) имеет единственное решение, которое непрерывно зависит от правой части. В следующем пункте выясним связь между уравнениями (9) и (7).

Теоретическое исследование реализуемости диаграммы направленности

Рассмотрим частный, но важный случай, когда оператор A –единичный, тогда уравнения (7) и (9) примут вид

$$Kj = F, \tag{10}$$

$$\alpha j + K^*Kj = K^*F. \tag{11}$$

Уравнения (10) и (11) рассмотрим в гильбертовом пространстве H [6]. В этом пункте выясним связь между решениями этих уравнений. Хорошо известно [7], что гильбертово пространство представляется в виде прямой суммы

$$H = \overline{R(K)} \oplus N(K^*). \tag{12}$$

Здесь $R(K)$ образ оператора K, а $N(K^*)$ – ядро сопряженного оператора. В соответствии с (12) правая часть (10) единственным образом представляется в виде суммы: $F = f + g,\ \ f \in \overline{R(K)}$, g$\in N(K^*)$. Заметим, что $K^*F = K^*f$, и при переходе от уравнения (10) к уравнению (11) теряется g.

Если $F \in R(K)$, то диаграмма **реализуема**, существуют поверхностные токи, создающие диаграмму. Если же $F \in \overline{R(K)}$, то диаграмма называется **аппроксимируемой**. В этих случаях $g = 0$. Если же $g \neq 0$, то диаграмма называется **не аппроксимируемой**. Для эффективного описания этих случаев, используем собственные функции оператора $T = K^*K$. Пусть $T\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$, $(\lambda_n > 0)$, $T{\varphi'}_n = 0$, тогда система функций $\{\varphi_n\} \cup \{{\varphi'}_n\}$ ортонормированна и полна в пространстве H. Также введем функции ψ_n по формуле $\psi_n \cdot \sqrt{\lambda_n} = K\varphi_n$. Система функций $\{\psi_n\}$ полна и ортонормированна в пространстве $\overline{R(K)}$. Справедливы следующие представления [7]

$$j = \sum_n (j, \varphi_n)\, \varphi_n + \sum_n (j, {\varphi'}_n)\, {\varphi'}_n, \tag{13}$$

$$Kj = \sum_n \sqrt{\lambda_n} (j, \varphi_n)\, \psi_n, \tag{14}$$

$$K^*F = \sum_n \sqrt{\lambda_n} (F, \psi_n)\, \varphi_n, \tag{15}$$

$$F = \sum_n (F, \psi_n)\, \psi_n. \tag{16}$$

Разложение (14) называется каноническим представлением Шмидта вполне непрерывного оператора K. С помощью разложения (13) с учетом свойств функция φ_n и ψ_n найдем решение j^α уравнения (9)

$$j^\alpha = \sum_n \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\alpha + \lambda_n} (F, \psi_n) \varphi_n \tag{17}$$

Расчетные функционалы обратных задач

Требуется найти поверхностные токи, которые реализуют близкую диаграмму и имеют как можно меньшую норму. Разность между реализованной и заданной диаграммой, или невязка, определяется формулой $Kj^\alpha - F$. Используя формулу (17) для решения уравнения (9), найдем норму и невязку

$$\|j^\alpha\|^2 = \sum_n \left| \frac{\sqrt{\lambda_n}}{\alpha + \lambda_n} \right|^2 |(f, \psi_n)|^2 \tag{18}$$

$$\|Kj^{\alpha} - F\|^2 = \sum_n \left|\frac{\alpha}{\alpha + \lambda_n}\right|^2 |(f, \psi_n)|^2 + \|g\|^2. \tag{19}$$

Функция (18) монотонно убывает, а функция (19) монотонно возрастает. Из последнего неравенства имеем $\|Kj^{\alpha} - F\| \geq \|g\|$, и если $g \neq 0$, то невязка строго положительна. Если же $g = 0$ или диаграмма аппроксимируема, то невязка стремится к нулю, когда α стремится к нулю. Если наряду с последним условием также выполняется неравенство $lim\|j^{\alpha}\| < +\infty$, когда α стремится к нулю, то диаграмма реализуема. В этом случае $j^{\alpha} \to j_0$, где $j_0 = \sum_n \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}(F, \psi_n)\varphi_n$.

Таким образом, по свойствам функционалов $\|Kj^{\alpha} - F\|$ и $\|j^{\alpha}\|$ можно определить реализуема или аппроксимируема заданная диаграмма направленности. Вычисление последних функционалов производится на основе решения уравнения (9) различными численными методами.

Уравнения с малым параметром в пространствах Соболева

Свойства уравнения (9) зависят от пространства H и оператора A. Чтобы поверхностные токи обладали необходимым поведением на ребре, пространства и операторы возьмем из прямой задачи дифракции электромагнитных волн на отрезке кругового цилиндра. Как и в работе [8], используем пространства Соболева и операторы прямых задач. Для азимутальных и аксиальных поверхностных токов имеем уравнения с малым параметром

$$\alpha L j_{\varphi} + K^* K j_{\varphi} = K^* F, \tag{20}$$

$$\alpha A j_z + K^* K j_z = K^* F, \tag{21}$$

где

$$\left(L j_{\varphi}\right)(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} j_{\varphi}(t) ln \frac{1}{|\tau - t|} dt ,$$

$$(A j_z)(\tau) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{-1}^{1} j_z(t) \frac{\partial}{\partial t} ln \frac{1}{|\tau - t|} dt.$$

Как показано в работе [8], интегральный оператор с логарифмической особенностью L непрерывно и взаимно однозначно отображает пространство $H_{-\frac{1}{2}}(-1,1)$ на все пространство $\widetilde{H}_{\frac{1}{2}}(-1,1)$. Обратный оператор L^{-1}также непрерывен. Поэтому уравнение (20) рассмотрим из пространства $H_{-\frac{1}{2}}(-1,1)$ в пространство $\widetilde{H}_{\frac{1}{2}}(-1,1)$.

Гиперсингулярный оператор A непрерывно и взаимно однозначно отображает пространство $H_{\frac{1}{2}}(-1,1)$ на все пространство $\widetilde{H}_{-\frac{1}{2}}(-1,1)$, обратный оператор A^{-1} непрерывен. Уравнение (21) рассмотрим из пространства $H_{\frac{1}{2}}(-1,1)$ в пространство $\widetilde{H}_{-\frac{1}{2}}(-1,1)$. С учетом этих свойств уравнения (20) и (21) эквивалентны уравнениям Фредгольма второго рода

$$\alpha j_{\varphi} + L^{-1}K^{*}Kj_{\varphi} = L^{-1}K^{*}F, \tag{22}$$

$$\alpha j_{z} + A^{-1}K^{*}Kj_{z} = A^{-1}K^{*}F \tag{23}$$

Для этих уравнений применима изложенная выше теорий операторных уравнений Фредгольма второго рода с малым параметром. Для решения уравнения (20) будем применять систему функций

$$\psi_1(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi ln2}}\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}} \quad, \psi_n(\tau) = \sqrt{\frac{2n}{\pi}}\frac{\cos(narccos(\tau))}{\sqrt{1-\tau^2}}, n = 2,3,4 \dots \tag{24}$$

а для решения уравнения (21) используем функции

$$\varphi_n(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}\sin(narccos(\tau)), n = 1,2,3, \dots . \tag{25}$$

Матрицы операторов L и A в соответствующих базисах являются единичными.

Пример численного расчета.

Правую часть уравнений (20) и (21) зададим в виде $F(x) = (1-x^2)^m$. С ростом m диаграмма $F(x)$ становится узкой и труднореализуемой. В таблицах 1 и 2 приведены результаты решения уравнений (20) и (21) соответственно. При этом $kl = \pi/2$, $N = 10$. Результаты демонстрируют уменьшение невязки при уменьшении параметра α и увеличение нормы поверхностных токов.

Таблица 1. Результат решения уравнения (20)

α	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}
$\|Kj^{\alpha}-F\|$	0,307	0,227	0,173
$\|j^{\alpha}\|_{-\frac{1}{2}}$	0,711	12,64	30,27

Таблица 2. Результат решения уравнения (21)

α	10^{-2}	10^{-4}	10^{-6}
$\|Kj^{\alpha}-F\|$	0,365	0,310	0,221
$\|j^{\alpha}\|_{\frac{1}{2}}$	1,74	4,49	22,86

Заключение

Таким образом, в работе изучены обратные задачам теории антенн, в которых по заданной диаграмме направленности определяются поверхностные токи. Для азимутальных и аксиальных поверхностных токов, не зависящих от координаты φ, получены операторные уравнения с малым параметром. Функциональные пространства выбраны таким образом, чтобы главные операторы этих уравнений были непрерывны и непрерывно обратимы. В результате операторные уравнения с малым параметром эквивалентны уравнениям Фредгольма второго рода. Рассмотрен пример численного расчета.

Благодарности

Работа выполнена в рамках реализации НИР "Математическое моделирование природных процессов", выполняемой по государственному заданию в сфере научной деятельности.

Список литературы

1. Драбкин А. Л., Зузенко В. Л. Антенно-фидерные устройства. Москва: Советское Радио, 1961. 816 с.
2. Бахрах Л. Д., Кременецкий С. Д. Синтез излучающих систем: теория и методы расчета. Москва: Советское Радио, 1974. 232 с.
3. Васильев Е. Н. Возбуждение тел вращения. Москва: Радио и связь, 1987. 272 с.
4. Каценеленбаум Б. З. Проблемы аппроксимируемости электромагнитного поля. Москва: Наука; Физматлит, 1996. 232 с.
5. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. Москва: Наука, 1978. 206 с.
6. Эминов И. С., Эминов С. И. Синтез поверхностных Е-поляризованных токов на полосе // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. 52 (7). 1354-1360.
7. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве: учебное пособие. Ленинград: Изд-во Ленинградского университета, 1980. 264 с.
8. Эминов С. И. Аналитическое обращение операторной матрицы задачи дифракции на отрезке цилиндра в пространствах Соболева // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2021. 61 (3). 450-456. DOI: 10.31857/S0044466921030054

References

1. Drabkin A. L., Zuzenko V. L. Antenno-fidernye ustrojstva [Antenna-feeder devices]. Moscow: Sovetskoe Radio, 1961. 816 p.
2. Bakhrakh L. D., Kremenetsky S. D. Sintez izluchayushchih sistem: teoriya i metody rascheta [Synthesis of radiating systems: theory and calculation methods]. Moscow: Sovetskoe Radio, 1974. 232 p.
3. Vasiliev E. N. Vozbuzhdenie tel vrashcheniya [Excitation of bodies of rotation]. Moscow: Radio and Communications, 1987. 272 p.

4. Katsenelenbaum B. Z. Problemy approksimiruemosti elektromagnitnogo polya [Problems of approximability of the electromagnetic field]. Moscow: Nauka; Fizmatlit, 1996. 232 p.
5. Ivanov V. K., Vasin V. V., Tanana V. P. Teoriya linejnyh nekorrektnyh zadach i ee prilozheniya [Theory of linear ill-posed problems and its applications]. Moscow: Nauka, 1978. 206 p.
6. Eminov I. S., Eminov S. I. Synthesis of surface E-polarized currents in the band // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2012. 52 (7). 1354-1360.
7. Birman M. S., Solomyak M. Z. Spektral'naya teoriya samosopryazhennyh operatorov v gil'bertovom prostranstve: uchebnoe posobie [Spectral theory of self-adjoint operators in Hilbert space: a textbook]. Leningrad: Publishing House of Leningrad University, 1980. 264 p.
8. Eminov S. I. Analytical inversion of the operator matrix of the diffraction problem on a cylinder segment in Sobolev spaces // Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2021. 61 (3). 450-456. DOI: 10.31857/S0044466921030054

Информация об авторах

Эминов Стефан Ильич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор, Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого (Великий Новгород, Россия), ORCID: 0000-0001-9497-8234, Stefan.Eminov@novsu.ru

Сочилин Андрей Викторович – кандидат технических наук, доцент, Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого (Великий Новгород, Россия), ORCID: 00090001-6857-7418, Andrey.Sochilin@novsu.ru