

ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

УДК 621.396:535.4:517.95

DOI: 10.34680/2076-8052.2023.5(134).863-870

ГРНТИ 49.37.29+29.31.29+27.29.23

Специальность ВАК 1.3.8

Научная статья

ОПЕРАТОРНОЕ УРАВНЕНИЕ ДИФРАКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА

Эминов С. И., Сочилин А. В., Петров Р. В., Захаров М. А.

*Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого
(Великий Новгород, Россия)*

Аннотация Предложен новый, математически эффективный метод решения векторного уравнения дифракции на незамкнутой поверхности вращения. В основе метода лежит выделение главного оператора, определение функциональных пространств и сведение операторного уравнения к уравнению Фредгольма второго рода. В качестве пространств используются пространства Соболева, учитывающие условие Мейкснера на ребре. В выбранных пространствах главный оператор ограничен, обратим и обратный оператор также ограничен. Разработан проекционный метод решения операторных уравнений.

Ключевые слова: векторное уравнение дифракции, система интегро-дифференциальных уравнений, двумерная система, одномерная система, главный оператор, пространства Соболева, уравнение Фредгольма, численный метод, матрица оператора, диагональная матрица

Для цитирования: Эминов С. И., Сочилин А. В., Петров Р. В., Захаров М. А. Операторное уравнение дифракции на отрезке кругового цилиндра // Вестник НовГУ. 2023. 5(134). 863-870. DOI: 10.34680/2076-8052.2023.5(134).863-870

Research Article

OPERATOR EQUATION OF DIFFRACTION ON A SEGMENT OF A CIRCULAR CYLINDER

Eminov S. I., Sochilin A. V., Petrov R. V., Zakharov M. A.

Yaroslav-the-Wise Novgorod State University (Veliky Novgorod, Russia)

Abstract A new, mathematically efficient method for solving the vector equation of diffraction on an open surface of rotation is proposed. The method is based on the allocation of the main operator, the definition of functional spaces and the reduction of the operator equation to the Fredholm equation of the second kind. Sobolev spaces are used as ones that take into account the Meixner condition on the edge. In the selected spaces, the main operator is bounded and invertible; the inverse operator is also bounded. A projection method for solving operator equations has been developed.

Keywords: vector diffraction equation, system of integro-differential equations, two-dimensional system, one-dimensional system, main operator, Sobolev spaces, Fredholm equation, numerical method, operator matrix, diagonal matrix

For citation: Eminov S. I., Sochilin A. V., Petrov R. V., Zakharov M. A. Operator equation of diffraction on a segment of a circular cylinder // Vestnik NovSU. 2023. 5(134). 863-870. DOI: 10.34680/2076-8052.2023.5(134).863-870

Введение. Векторное уравнение электромагнитных волн на идеально-проводящей поверхности

Электродинамический анализ задач дифракции на идеально-проводящих поверхностях и вибраторных антенн основан на решении интегральных уравнений относительно поверхностных токов. Пусть на идеально проводящую поверхность S падает произвольная электромагнитная волна $\vec{E}^0, \vec{H}^0$. В результате этого на поверхности S наводятся поверхностные токи с плотностью $\vec{j}$. Неизвестная функция поверхностных токов удовлетворяет векторному уравнению [1]

$$[-grad_P \iint (grad_Q G, \vec{j}) dS + k^2 \iint G \vec{j} dS, \vec{n}]_S = -i \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} [\vec{E}^0, \vec{n}]_S. \quad (1)$$

Здесь интегрирование проводится по поверхности S , P – точка наблюдения, Q – точка излучения, $G = \frac{\exp(-ikR)}{4\pi kR}$ – функция Грина, $R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ – расстояние между точкой излучения и точкой наблюдения на поверхности S , ε – диэлектрическая проницаемость, μ – магнитная проницаемость, k – волновое число.

Система двумерных интегро-дифференциальных уравнений

На поверхности S введем криволинейные ортогональные координаты. Связь с декартовыми координатами в точке наблюдения S описывается равенствами $x = x(v, \tau, q_0)$, $y = y(v, \tau, q_0)$, $z = z(v, \tau, q_0)$, а в точке излучения Q – соотношениями $x' = x'(u, t, q_0)$, $y' = y'(u, t, q_0)$, $z' = z'(u, t, q_0)$. Тогда векторное уравнение (1) относительно векторной функции $\vec{j}(j_u, j_t)$ сведется к системе интегро-дифференциальных уравнений [2]

$$\begin{cases} \iint [K_u^v(v, u, \tau, t) j_u(u, t) + K_t^v(v, u, \tau, t) j_t(u, t)] dS = i \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_v^0(v, \tau), \\ \iint [K_u^\tau(v, u, \tau, t) j_u(u, t) + K_t^\tau(v, u, \tau, t) j_t(u, t)] dS = i \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_v^0(v, \tau), \end{cases} \quad (2)$$

где

$$K_u^v = \frac{H_t}{H_v} \frac{\partial^2 G}{\partial v \partial u} - k^2 G \vec{e}_u \cdot \vec{e}_v H_u H_t, K_t^v = \frac{H_u}{H_v} \frac{\partial^2 G}{\partial v \partial t} - k^2 G \vec{e}_t \cdot \vec{e}_v H_u H_t,$$

$$K_u^\tau = \frac{H_t}{H_\tau} \frac{\partial^2 G}{\partial \tau \partial u} - k^2 G \vec{e}_u \cdot \vec{e}_\tau H_u H_t, K_t^\tau = \frac{H_u}{H_\tau} \frac{\partial^2 G}{\partial \tau \partial t} - k^2 G \vec{e}_t \cdot \vec{e}_\tau H_u H_t,$$

H_t, H_τ, H_u, H_v – коэффициенты Ламе, $\vec{e}_t, \vec{e}_\tau, \vec{e}_u, \vec{e}_v$ – орты координатных линий.

Систему уравнений (2) применим к задаче дифракции на отрезке кругового цилиндра. В цилиндрической системе координат (r, φ, z) поверхность S описывается соотношениями: $-l \leq z \leq l, r = a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Векторная функция поверхностных

токов $\vec{j}$ имеет аксиальную составляющую $j_z(z, \varphi)$ и азимутальную компоненту $j_\varphi(z, \varphi)$. Они удовлетворяют системе интегро-дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \iint \left[j_z \left(\frac{\partial^2 G}{\partial z \partial z'} - k^2 G \right) + j_\varphi \frac{\partial^2 G}{a \partial z \partial \varphi'} \right] dS = i \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_z^0, \\ \iint \left[j_z \left(\frac{\partial^2 G}{a \partial z' \partial \varphi} \right) + j_\varphi \left(\frac{\partial^2 G}{a^2 \partial \varphi \partial \varphi'} - k^2 \cos(\varphi - \varphi') G \right) \right] dS = i \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_\varphi^0. \end{cases} \quad (3)$$

Система одномерных интегро-дифференциальных уравнений

Система (3) является двумерной. Для сведения этой системы к одномерной разложим функцию Грина и все функции, входящие в систему (3), в ряды Фурье.

$$\begin{aligned} G &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp(-im(\varphi - \varphi')) S_m(z, z'), S_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G \exp(im(\varphi - \varphi')) d\varphi', \\ j_z(z, \varphi) &= \frac{1}{2\pi a} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp(-im\varphi) u_m(z), u_m = \int_0^{2\pi} j_z \exp(im\varphi) a d\varphi, \\ j_\varphi(z, \varphi) &= \frac{1}{2\pi a} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp(-im\varphi) v_m(z), v_m = \int_0^{2\pi} j_\varphi \exp(im\varphi) a d\varphi, \\ E_z^0 &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp(-im\varphi) E_z^m(z), E_\varphi^0 = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \exp(-im\varphi) E_\varphi^m(z). \end{aligned} \quad (4)$$

Используя разложение в ряды Фурье (4), сведем двумерную систему (3) к одномерной системе. Одновременно перейдем к безразмерным переменным по формулам $z = l\tau, z' = lt$. В результате получим систему

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 \left[u_m \left(\frac{1}{(kl)} \frac{\partial^2 S_m}{\partial \tau \partial t} - (kl) S_m \right) + v_m \frac{im}{(ka)} \frac{\partial S_m}{\partial \tau} \right] dt = \frac{i}{k} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_z^m, \\ \int_{-1}^1 \left[u_m \frac{-im}{(ka)} \frac{\partial S_m}{\partial t} + v_m \left(\frac{m^2 (kl)}{(ka)^2} S_m - (kl) \frac{S_{m+1} + S_{m-1}}{2} \right) \right] dt = \frac{i}{k} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_\varphi^m. \end{cases} \quad (5)$$

Систему (5) необходимо решить для каждого значения m . При фиксированном m система (5) описывает задачу дифракции, в которой первичное поле определяется формулами:

$$E_z^0(z, \varphi) = \exp(-im\varphi) E_z^m(z), E_\varphi^0(z, \varphi) = \exp(-im\varphi) E_\varphi^m(z).$$

Поэтому исследование системы (5) имеет самостоятельный интерес.

Операторная форма записи системы уравнений

Функция $S_m(\tau, t)$ имеет логарифмическую особенность [3]

$$S_m(\tau, t) = \frac{1}{4\pi^2(ka)} \ln \frac{1}{|\tau - t|} + N_m(\tau, t). \quad (6)$$

Функция $N_m(\tau, t)$ является непрерывной вместе с частными производными первого порядка. В соответствии с представлением (6) выделим главные части операторов, входящих в (5), и для их описания введем операторную матрицу

$$T = \begin{pmatrix} a_{11}Aa_{12}SL \\ a_{21}SAa_{22}L \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} (Au)(\tau) &= \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-1}^1 u(\tau) \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{1}{|\tau-t|} dt, \quad (SLv)(\tau) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-1}^1 v(\tau) \ln \frac{1}{|\tau-t|} dt, \\ (SAu)(\tau) &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 u(\tau) \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{1}{|\tau-t|} dt, \quad (Lv)(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 v(\tau) \ln \frac{1}{|\tau-t|} dt, \quad (8) \\ a_{11} &= \frac{1}{4\pi(kl)(ka)}, a_{12} = \frac{im}{4\pi(ka)^2}, a_{21} = -\frac{im}{4\pi(ka)^2}, a_{22} = \frac{(kl)}{4\pi(ka)} \left(\frac{m^2}{(ka)^2} - 1 \right). \end{aligned}$$

Интегральный оператор L имеет логарифмическую особенность в ядре. Операторы SA и SL получаются из оператора L в результате дифференцирования, и суть сингулярные операторы первого рода. Оператор A получается из оператора L двойным дифференцированием и является гиперсингулярным оператором. Теперь опишем операторную матрицу, соответствующую второму слагаемому (6)

$$B = \begin{pmatrix} B_{11}B_{12} \\ B_{21}B_{22} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} (B_{11}u)(\tau) &= \int_{-1}^1 u \left(\frac{1}{(kl)} \frac{\partial^2 N_m}{\partial \tau \partial t} - (kl)S_m \right) dt, \\ (B_{12}v)(\tau) &= \int_{-1}^1 v \frac{im}{(ka)} \frac{\partial N_m}{\partial \tau} dt, \quad (B_{21}u)(\tau) = \int_{-1}^1 u \frac{-im}{(ka)} \frac{\partial N_m}{\partial \tau} dt, \quad (10) \\ (B_{22}v)(\tau) &= \int_{-1}^1 v \left(\frac{m^2(kl)}{(ka)^2} N_m - (kl) \frac{N_{m+1} + N_{m-1}}{2} \right) dt. \end{aligned}$$

С учетом введенных операторов запишем систему (5) в операторной форме

$$T \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_m \\ g_m \end{pmatrix}, f_m = \frac{i}{k} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_z^m, g_m = \frac{i}{k} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_\varphi^m. \quad (11)$$

Пространство решений. Эквивалентность операторного уравнения к уравнению Фредгольма второго рода

Введем основные определения функциональных пространств, в которых будем искать решения [4,5]. $H_s(R)$ пространство обобщенных функций $u(\tau)$, преобразование Фурье которых $\tilde{u}(\xi)$ локально интегрируемо в смысле Лебега и удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_s^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|)^{2s} d\xi < +\infty. \quad (12)$$

Выражение (12) определяет норму в пространстве $H_s(R)$. Пространство $H_s(-1,1)$ определяется как подпространство $\text{в } H_s(R)$. Оно состоит из функций $u(\tau)$ с носителем в промежутке $[-1,1]$. Финитные и бесконечно дифференцируемые функции $C_0^\infty(-1,1)$ являются плотными в пространстве $H_s(-1,1)$ по норме (12). $\tilde{H}_s(-1,1)$ –пространство обобщенных функций f , допускающих продолжение lf навсе R , принадлежащее $H_s(R)$. Норма в $\tilde{H}_s(-1,1)$ определяется формулой

$$\|f\|_s = \inf_l \|lf\|_s. \quad (13)$$

По корневому закону, плотность аксиальных токов u_m обращается нуль на концах отрезка $[-1,1]$, а плотность азимутальных v_m –в бесконечность. Функцию u_m будем искать в пространстве $H_{\frac{1}{2}}(-1,1)$, а функцию v_m – в пространстве $H_{-\frac{1}{2}}(-1,1)$. Обозначим через H прямую сумму $H_{\frac{1}{2}}(-1,1) \dot{+} H_{-\frac{1}{2}}(-1,1)$, а через $\tilde{H}$ прямую сумму $\tilde{H}_{-\frac{1}{2}}(-1,1) \dot{+} \tilde{H}_{\frac{1}{2}}(-1,1)$. Операторы T и B действуют из пространства H в пространство $\tilde{H}$.

Отметим важное свойство коэффициентов матрицы оператора T :

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} = \\ &= \frac{1}{4\pi(kl)(ka)} \cdot \frac{(kl)}{4\pi(ka)} \left(\frac{m^2}{(ka)^2} - 1 \right) - \frac{im}{4\pi(ka)^2} \cdot (-) \frac{im}{4\pi(ka)^2} = \\ &= \frac{m^2}{16\pi^2(ka)^4} - \frac{1}{16\pi^2(ka)^2} - \frac{m^2}{16\pi^2(ka)^4} = -\frac{1}{16\pi^2(ka)^2} \neq 0. \end{aligned} \quad (14)$$

При выполнении условия (14), как доказано в работе [6], справедлива.

Теорема. Ограниченный оператор T взаимно однозначно отображает пространство H на все пространство $\tilde{H}$. Обратный оператор T^{-1} существует, ограничен и взаимно однозначно отображает пространство $\tilde{H}$ на все пространство H .

Применяя к обеим частям уравнения (11) оператор T^{-1} , получим

$$I \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \end{pmatrix} + T^{-1}B \begin{pmatrix} u_m \\ v_m \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} f_m \\ g_m \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где I – единичный оператор.

Обратимся к соотношению (6). Функция $N_m(\tau, t)$ не имеет особенностей при совпадении аргументов, в отличие от первого слагаемого. Из свойств функции S_m , полученных в работе [3], следует, что первые частные производные функции $N_m(\tau, t)$ являются непрерывными, а вторые частные производные имеют логарифмическую особенность. На основании свойств функции $N_m(\tau, t)$ можно доказать, что оператор T^{-1} является вполне непрерывным, а уравнение (15) – уравнение Фредгольма второго рода.

Численный метод решения операторного уравнения

Пусть система функций $\{\varphi_i\}_1^{+\infty}$ полна в пространстве $H_{\frac{1}{2}}(-1,1)$, а система функций $\{\psi_i\}_1^{+\infty}$ полна в пространстве $H_{-\frac{1}{2}}(-1,1)$. Решение операторного уравнения (15) будем искать по формуле в виде

$$u_m = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i, v_m = \sum_{j=1}^N d_j \psi_j. \quad (16)$$

Подставим (16) в (11)

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N c_i (a_{11}A + B_{11})\varphi_i + \sum_{j=1}^N d_j (a_{12}SL + B_{12})\psi_j = f_m, \\ \sum_{i=1}^N c_i (a_{21}SA + B_{21})\varphi_i + \sum_{j=1}^N d_j (a_{22}L + B_{22})\psi_j = g_m, \end{cases} \quad (17)$$

затем умножим первое уравнение (17) скалярно в $L_2[-1,1]$ на функцию $\varphi_k (1 \leq k \leq N)$, а второе уравнение (17) умножим на $\varphi_l (1 \leq l \leq N)$. В результате получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N c_i ((a_{11}A + B_{11})\varphi_i, \varphi_k) + \sum_{j=1}^N d_j ((a_{12}SL + B_{12})\psi_j, \varphi_k) = (f_m, \varphi_k), \\ \sum_{i=1}^N c_i ((a_{21}SA + B_{21})\varphi_i, \psi_l) + \sum_{j=1}^N d_j ((a_{22}L + B_{22})\psi_j, \psi_l) = (g_m, \psi_l), \end{cases} \quad (18)$$

$$1 \leq k \leq N, 1 \leq l \leq N.$$

Система (18) является линейной системой порядка $2N$. Обоснование численного метода для операторных уравнений, эквивалентных уравнению второго порядка, имеется в [7]. В работе [2] в качестве функций φ_i и ψ_j предложены кусочно-постоянные функции. Разработанный в [2] метод является универсальным, пригодным для любой поверхности. Для задачи дифракции на отрезке кругового цилиндра более эффективными являются базисные функции, учитывающие условие Мейкснера на ребре [3]. Они имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_n(\tau) &= \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \sin(\text{narccos}(\tau)), n = 1, 2, 3, \dots, \\ \psi_1(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{\pi \ln 2}} \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}, \psi_n(\tau) = \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \frac{\cos(\text{narccos}(\tau))}{\sqrt{1-\tau^2}}, n = 2, 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (19)$$

Матрицы интегральных и интегро-дифференциальных операторов L, SA, SL и A находятся аналитически, более того, они являются диагональными. Именно это свойство обеспечивает устойчивость численного метода. Матрицы операторов $B_{ij} (i = 1, 2; j = 1, 2)$ эффективно вычисляются численными методами на ЭВМ.

Заключение

Таким образом, в работе развит общий метод вывода системы двумерных и одномерных интегро-дифференциальных уравнений на незамкнутых поверхностях вращения. На основе логарифмической особенности ядра выведен и описан главный оператор задачи в пространствах Соболева. Главный оператор является

ограниченным, взаимно-однозначным и отображает пространство решений на все пространство правых частей. Как следствие, главный оператор имеет ограниченный обратный оператор, а операторное уравнение эквивалентно уравнению Фредгольма второго рода. Развита численный метод решения операторного уравнения.

Список литературы

1. Васильев Е. Н. Возбуждение тел вращения. Москва: Радио и связь, 1987. 272 с.
2. Давыдов А. Г., Захаров Е. В., Пименов Ю. В. Метод численного решения задач дифракции электромагнитных волн на незамкнутых поверхностях произвольной формы // Доклады Академии наук. 1984. 276(1). 96-100.
3. Социлин А. В., Эминов С. И. Метод собственных функций сингулярных операторов в теории дифракции на толстом вибраторе // Журнал технической физики. 1998. 68(4). 96-101.
4. Ильинский А. С., Смирнов Ю. Г. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах: псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции. Москва: ИПРЖР, 1996. 176 с.
5. Смирнов Ю. Г. Математические методы исследования задач электродинамики: монография. Пенза: Пензен. гос. ун-т, 2009. 266 с.
6. Эминов С. И. Аналитическое обращение операторной матрицы задачи дифракции на отрезке цилиндра в пространствах Соболева // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2021. 61(3). 450-456. DOI: 10.31857/S0044466921030054
7. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. 2-е изд., перераб. и доп.. Москва: Наука, 1970. 512 с.

References

1. Vasil'ev E. N. Vozbuzhdenie tel vrashcheniia [Excitation of bodies of revolution]. Moscow, Radio i sviaz', 1987. 272 p.
2. Davydov A. G., Zakharov E. V., Pimenov Iu. V. Metod chislenного resheniia zadach difraktsii elektromagnitnykh voln na nezamknutykh poverkhnostiakh proizvol'noi formy [A numerical method for solving the problems of electromagnetic wave diffraction on freeform open surfaces] // Doklady Akademii nauk. 1984. 276(1). 96-100.
3. Sochilin A. V., Eminov S. I. Method of eigenfunctions of singular operators in the theory of diffraction by a thick vibrator // Technical Physics. 1998. 43. 434-438. DOI: 10.1134/1.1259000
4. Il'inskii A. S., Smirnov Iu. G. Difraktsiia elektromagnitnykh voln na provodiashchikh tonkikh ekranakh: psevdodifferentsial'nye operatory v zadachakh difraktsii [Diffraction of electromagnetic waves on thin conductive screens: pseudo-differential operators in diffraction problems]. Moscow, IPRZhR, 1996. 176 p.
5. Smirnov Iu. G. Matematicheskie metody issledovaniia zadach elektrodinamiki [Mathematical methods for solving electrodynamic problems]. Penza: Penzen. gos. un-t, 2009. 266 p.
6. Eminov S. I. Analytical inversion of the operator matrix for the problem of diffraction by a cylindrical segment in Sobolev spaces // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2021. 61(3). 424-430. DOI: 10.1134/S0965542521030052
7. Mikhlin S. G. Variatsionnye metody v matematicheskoi fizike [Variational methods in mathematical physics]. 2nd ed., rev. and enl. Moscow, Nauka, 1970. 512 p.

Информация об авторах

Эминов Стефан Ильич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор, Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого (Великий Новгород, Россия), ORCID: 0000-0001-9497-8234, Stefan.Eminov@novsu.ru

Сочилин Андрей Викторович – кандидат технических наук, доцент, доцент, Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого (Великий Новгород, Россия), ORCID: 0009-0001-6857-7418, Andrey.Sochilin@novsu.ru

Петров Роман Валерьевич – доктор физико-математических наук, доцент, профессор, главный научный сотрудник, Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого (Великий Новгород, Россия), ORCID: 0000-0002-9751-116X, Roman.Petrov@novsu.ru

Захаров Максим Анатольевич – доктор физико-математических наук, доцент, профессор, Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого (Великий Новгород, Россия), ORCID: 0000-0002-9144-340X, Maxim.Zakharov@novsu.ru