ФИЗИКА КОНДЕНСИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

УДК 621.396:535.4:517.968 ГРНТИ 49.43.29+29.31.29+27.23.21
DOI: 10.34680/2076-8052.2023.5(134).858-862 Специальность ВАК 1.3.8

Научная статья

ТЕОРИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИФРАКЦИИ НА НЕЗАМКНУТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Эминов С. И., Сочилин А. В., Захаров М. А., Петров Р. В.

Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого (Великий Новгород, Россия)

Аннотация Предложен новый, математически эффективный метод решения векторного уравнения дифракции на незамкнутой цилиндрической поверхности. В основе метода лежит выделение главного оператора, определение функциональных пространств и сведение операторного уравнения к уравнению Фредгольма второго рода. В качестве пространств используются пространства Соболева, учитывающие условие Мейкснера на ребре. В выбранных пространствах главный оператор ограничен, обратим и обратный оператор также непрерывен. Развит проекционный метод решения операторных уравнений.

Ключевые слова: векторное уравнение дифракции, система интегро-дифференциальных уравнений, двумерная система, одномерная система, главный оператор, пространства Соболева, уравнение Фредгольма, численный метод, матрица оператора, диагональная матрица

Для цитирования: Эминов С. И., Сочилин А. В., Захаров М. А., Петров Р. В. Теория интегральных уравнений дифракции на незамкнутой цилиндрической поверхности // Вестник НовГУ. 2023. 5(134). 858-862. DOI: 10.34680/2076-8052.2023.5(134).858-862

Research Article

THEORY OF INTEGRAL EQUATIONS OF DIFFRACTION ON AN OPEN CYLINDRICAL SURFACE

Eminov S. I., Sochilin A. V., Zakharov M. A., Petrov R. V.

Yaroslav-the-Wise Novgorod State University (Veliky Novgorod, Russia)

Abstract A new, mathematically efficient method for solving the vector equation of diffraction on an open cylindrical surface is proposed. The method is based on the allocation of the main operator, the definition of functional spaces and the reduction of the operator equation to the Fredholm equation of the second kind. Sobolev spaces are used as ones that take into account the Meixner condition on the edge. In the selected spaces, the main operator is bounded and invertible; the inverse operator is also bounded. A projection method for solving operator equations has been developed.

Keywords: vector diffraction equation, system of integro-differential equations, two-dimensional system, one-dimensional system, main operator, Sobolev spaces, Fredholm equation, numerical method, operator matrix, diagonal matrix

For citation: Eminov S. I., Sochilin A. V., Zakharov M. A., Petrov R. V. Theory of integral equations of diffraction on an open cylindrical surface // Vestnik NovSU. 2023. 5(134). 858-862. DOI: 10.34680/2076-8052.2023.5(134).858-862

Введение. Векторное уравнение электромагнитных волн на идеально-проводящей поверхности

Электродинамический анализ задач дифракции на идеально-проводящих поверхностях и вибраторных антеннах основан на решении интегральных уравнений относительно поверхностных токов. Пусть на идеально проводящую поверхность S падает произвольная электромагнитная волна $\overrightarrow{E^0}$, $\overrightarrow{H^0}$. В результате этого на поверхность S наводятся поверхностные токи с плотностью $\vec{j}$. Неизвестная функция поверхностных токов удовлетворяет векторному уравнению [1]

$$\left[-grad_P \iint \left(grad_Q G, \vec{j}\right) dS + k^2 \iint G\vec{j} dS, \vec{n}\right]_S = -i\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left[\vec{E}^0, \vec{n}\right]_S. \qquad (1)$$

Здесь интегрирование проводится по поверхности S, P – точка наблюдения, Q – точка излучения, $G = \frac{exp(-ikR)}{4\pi kR}$ – функция Грина, $R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$ – расстояние между точкой излучения и точкой наблюдения на поверхности S, ε – диэлектрическая проницаемость, μ –магнитная проницаемость, k –волновое число.

Система двумерных интегро-дифференіальных уравнений

На поверхности S введем криволинейные ортогональные координаты. Связь с декартовыми координатами в точке наблюдения S описывается равенствами $x = x(v,\tau,q_0)$, $y = y(v,\tau,q_0)$, $z = z(v,\tau,q_0)$, а в точке излучения Q соотношениями $x' = x'(u,t,q_0)$, $y' = y'(u,t,q_0)$, $z' = z'(u,t,q_0)$. Тогда векторное уравнение (1) относительно векторной функции $\vec{j}(j_u, j_t)$ сведется к системе интегро-дифференциальных уравнений [2]

$$\begin{cases} \iint [K_u^v(v,u,\tau,t) j_u(u,t) + K_t^v(v,u,\tau,t) j_t(u,t)] dS = i\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_v^0(v,\tau), \\ \iint [K_u^\tau(v,u,\tau,t) j_u(u,t) + K_t^\tau(v,u,\tau,t) j_t(u,t)] dS = i\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_v^0(v,\tau), \end{cases} \qquad (2)$$

где

$$K_u^v = \frac{H_t}{H_v}\frac{\partial^2 G}{\partial v \partial u} - k^2 G \vec{e}_u \cdot \vec{e}_v H_u H_t, K_t^v = \frac{H_u}{H_v}\frac{\partial^2 G}{\partial v \partial t} - k^2 G \vec{e}_t \cdot \vec{e}_v H_u H_t,$$

$$K_u^\tau = \frac{H_t}{H_\tau}\frac{\partial^2 G}{\partial \tau \partial u} - k^2 G \vec{e}_u \cdot \vec{e}_\tau H_u H_t, K_t^\tau = \frac{H_u}{H_\tau}\frac{\partial^2 G}{\partial \tau \partial t} - k^2 G \vec{e}_t \cdot \vec{e}_\tau H_u H_t,$$

H_t, H_τ, H_u, H_v –коэффициенты Ламе, $\vec{e}_t, \vec{e}_\tau, \vec{e}_u, \vec{e}_v$ –орты координатных линий.

Интегральные уравнения на цилиндрической поверхности

Систему уравнений (2) применим к задаче дифракции на цилиндрической поверхности. Ось z параллельна образующей цилиндрической поверхности S.

Контур Г, образованный пересечением поверхности S с плоскостью $z = 0$, задается уравнениями $x = \xi(\tau), y = \eta(\tau), -1 \le \tau \le 1$. Рассмотрим случай, когда первичное поле не зависит от координаты z. Как следствие, поверхностные токи также не зависят от z и система (2) распадается на два независимых уравнения. Далее, двумерные ядра можно свести к одномерным. Для этого воспользуемся тождеством

$$\int_{-1}^{1} \frac{exp(-ikR)}{4\pi kR} dz' = \int_{-1}^{1} \frac{exp\left(-ik\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\right)}{4\pi k\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} dz' =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{exp\left(-ik\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+t^2}\right)}{4\pi k\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+t^2}} dt = -\frac{i}{4k} H_0^{(2)}\left(k\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}\right) = -\frac{i}{4k} H_0^{(2)}(kL), \quad (3)$$

где $H_0^{(2)}(x)$ – функция Ханкеля второго рода и нулевого полрядка.

Для задачи дифракции E –поляризованных волн, когда первичное поле и токи параллельны оси z, из (2) получим интегральное уравнение

$$k\int_{-1}^{1} H_0^{(2)}(kL)\sqrt{\xi'^2(\tau)+\eta'^2(\tau)} j_z(t)dt = 4\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_z^0(\tau). \quad (4)$$

В этом уравнении сделаем замену $k\sqrt{\xi'^2(\tau)+\eta'^2(\tau)} j_z(t)dt = u(t)$. Функция Ханкеля является линейной комбинацией функций Бесселя и Неймана: $H_0^{(2)} = J_0 - iN_0$, а функция N_0 имеет логарифмическую особенность, точнее функция $N_0(|x|) - \frac{2}{\pi} ln|x|$ непрерывно дифференцируема. Выделяя логарифмическую особенность из (4), получим уравнение

$$2i(Lu)(\tau) + (Mu)(\tau) = 4\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_z^0(\tau), \quad (5)$$

где $(Lu)(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} u(t) ln\frac{1}{|\tau-t|} dt$, $(Mu)(\tau) = \int_{-1}^{1}\left(H_0^{(2)}(kL) - \frac{2i}{\pi} ln\frac{1}{|\tau-t|}\right) u(t)dt$.

Решение уравнения будем искать в пространстве Соболева [3] $H_{-\frac{1}{2}}(-1,1)$, а правая часть принадлежит пространству $\widetilde{H}_{\frac{1}{2}}(-1,1)$. Имеет место теорема [3].

Теорема 1. Оператор L непрерывно и взаимно однозначно отображает пространство $H_{-\frac{1}{2}}(-1,1)$ на все пространство $\widetilde{H}_{\frac{1}{2}}(-1,1)$, обратный оператор L^{-1} также непрерывен и задается формулой

$$(L^{-1}g)(\tau) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}g'(t)}{\tau-t} dt + \frac{1}{\pi ln2}\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}\int_{-1}^{1}\frac{g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt . \quad (6)$$

Оператор $L^{-1}M$ вполне непрерывен, а уравнение (5) эквивалентно уравнению Фредгольма второго рода. Уравнение (5) эффективно решается методом Галеркина с использованием функций

$$\psi_1(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi ln2}}\frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}, \psi_n(\tau) = \sqrt{\frac{2n}{\pi}}\frac{\cos(narccos(\tau))}{\sqrt{1-\tau^2}}, n = 2,3,4 \dots \quad (7)$$

Матрица оператора L в данном базисе является единичной.

А теперь рассмотрим задачу $H-$ поляризации, когда поверхностные токи перпендикулярны образующей, оси z и направлены по касательной к контуру Г. Плотность токов удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению

$$\int_{-1}^{1}\frac{\partial^2 H_0^{(2)}(kL)}{\partial\tau\partial t}j_t(t)dt - \int_{-1}^{1}H_0^{(2)}(kL)\left(k^2\left(\xi'(\tau)\xi'(t)+\eta'(\tau)\eta'(t)\right)\right)j_t(t)dt =$$

$$= -4\,k\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\sqrt{\xi'^2(\tau)+\eta'^2(\tau)}E_z^0(\tau). \quad (8)$$

Выделяя логарифмическую особенность из (8), получим уравнение

$$2i(Aj_t)(\tau) + (Bj_t)(\tau) = -4\,k\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\sqrt{\xi'^2(\tau)+\eta'^2(\tau)}E_z^0(\tau), \quad (9)$$

где

$$(Aj_t)(\tau) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_{-1}^{1}j_t(t)\frac{\partial}{\partial t}ln\frac{1}{|\tau-t|}dt,$$

$$(Bj_t)(\tau) = \int_{-1}^{1}\frac{\partial^2}{\partial\tau\partial t}\left(H_0^{(2)}(kL) - \frac{2i}{\pi}ln\frac{1}{|\tau-t|}\right)j_t(t)dt -$$

$$-\int_{-1}^{1}H_0^{(2)}(kL)\left(k^2\left(\xi'(\tau)\xi'(t)+\eta'(\tau)\eta'(t)\right)\right)j_t(t)dt\,. \quad (10)$$

Теорема 2. Оператор A непрерывно и взаимно однозначно отображает пространство $H_{\frac{1}{2}}(-1,1)$ на все пространство $\widetilde{H}_{-\frac{1}{2}}(-1,1)$, обратный оператор A^{-1} также непрерывен и задается выражением

$$(A^{-1}f)(\tau) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}f(t)ln\left|\frac{\tau-t}{1-\tau t+\sqrt{1-\tau^2}\sqrt{1-t^2}}\right|dt\,. \quad (11)$$

Оператор $A^{-1}B$ вполне непрерывен, а уравнение (9) эквивалентно уравнению Фредгольма второго рода. Уравнение (9) эффективно решается методом Галеркина с использованием функций

$$\varphi_n(\tau) = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}\sin\left(narccos(\tau)\right), n = 1,2,3,\dots\,. \quad (12)$$

Матрица оператора A в данном базисе является единичной.

Заключение

Таким образом, в работе развит общий метод вывода системы двумерных и одномерных интегро-дифференциальных уравнений на незамкнутой цилиндрической поверхности. На основе логарифмической особенности ядра выведен и описан главный оператор задачи в пространствах Соболева. Главный оператор является ограниченным, взаимно-однозначным и отображает пространство решений на все пространство правых частей. Как следствие, главный оператор имеет ограниченный обратный оператор, а операторное уравнение эквивалентно уравнению Фредгольма второго рода. Развит численный метод решения операторного уравнения.

Список литературы

1. Васильев Е. Н. Возбуждение тел вращения. Москва: Радио и связь, 1987. 272 с.
2. Давыдов А. Г., Захаров Е. В., Пименов Ю. В. Метод численного решения задач дифракции электромагнитных волн на незамкнутых поверхностях произвольной формы // Доклады Академии наук. 1984. 276(1). 96-100.
3. Эминов С. И. Аналитическое обращение операторной матрицы задачи дифракции на отрезке цилиндра в пространствах Соболева // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2021. 61(3). 450-456. DOI: 10.31857/S0044466921030054

References

1. Vasil'ev E. N. Vozbuzhdenie tel vrashcheniia [Excitation of bodies of revolution]. Moscow, Radio i sviaz', 1987. 272 p.
2. Davydov A. G., Zakharov E. V., Pimenov Iu. V. Metod chislennogo resheniia zadach difraktsii elektromagnitnykh voln na nezamknutykh poverkhnostiakh proizvol'noi formy [A numerical method for solving the problems of electromagnetic wave diffraction on freeform open surfaces] // Doklady Akademii nauk. 1984. 276(1). 96-100.
3. Eminov S. I. Analytical inversion of the operator matrix for the problem of diffraction by a cylindrical segment in Sobolev spaces // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2021. 61(3). 424-430. DOI: 10.1134/S0965542521030052

Информация об авторах

Эминов Стефан Ильич – доктор физико-математических наук, профессор, профессор, Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого (Великий Новгород, Россия), ORCID: 0000-0001-9497-8234, Stefan.Eminov@novsu.ru

Сочилин Андрей Викторович – кандидат технических наук, доцент, доцент, Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого (Великий Новгород, Россия), ORCID: 0009-0001-6857-7418, Andrey.Sochilin@novsu.ru

Захаров Максим Анатольевич – доктор физико-математических наук, доцент, профессор, Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого (Великий Новгород, Россия), ORCID: 0000-0002-9144-340X, Maxim.Zakharov@novsu.ru

Петров Роман Валерьевич – доктор физико-математических наук, доцент, профессор, главный научный сотрудник, Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого (Великий Новгород, Россия), ORCID: 0000-0002-9751-116X, Roman.Petrov@novsu.ru