

РАДИОФИЗИКА

УДК 536.24:622.241

DOI: 10.34680/2076-8052.2023.3(132).438-445

ГРНТИ 29.19.09+52.47.17

Специальность ВАК 1.3.4; 1.2.2

Научная статья

АСИМПТОТИКА ПРОГРЕВА ГОРНЫХ ПОРОД ДОБЫЧНОЙ СКВАЖИНОЙ

Алишаев М. Г.¹, Аливердиев А. А.^{1, 2}, Бейбалаев В. Д.^{1, 2}

¹*Института проблем геотермии и возобновляемой энергетики – филиал ОИВТ РАН
(Махачкала, Россия)*

²*Дагестанского государственного университета (Махачкала, Россия)*

Аннотация Получено асимптотическое решение методом интегральных соотношений задачи разогрева горной породы для эксплуатируемой в установившемся режиме добычной скважины. В подземной гидравлике и добыче нефти такого рода асимптотики широко используются для практических оценок температурных профилей по стволу скважины и температуры на устье. Предложена единая формула для оттока (притока) тепла в горную породу, которая используется для оценок потерь тепла из ствола скважины и профиля температуры по стволу по истечению начального периода, после выхода на установившийся режим.

Ключевые слова: горные породы, нагнетание воды, теплопередача

Для цитирования: Алишаев М. Г., Аливердиев А. А., Бейбалаев В. Д. Асимптотика прогрева горных пород добычной скважиной // Вестник НовГУ. 2023. 3(132). 438-445. DOI: 10.34680/2076-8052.2023.3(132).438-445

Research Article

ASYMPTOTICS OF HEATING OF ROCKS BY A PRODUCTION WELL

Alishaev M. G.¹, Aliverdiev A. A.^{1, 2}, Beibalaev V. D.^{1, 2}

¹*Institute for Geothermal Research and Renewable Energy – Joint Institute for High Temperatures of the Russian Academy of Sciences (Makhachkala, Russia)*

²*Dagestan State University (Makhachkala, Russia)*

Abstract An asymptotic solution has been obtained by the method of integral relations of the problem of rock heating for the case of a production well operated in a steady state. In underground hydraulics and oil production, such asymptotics are widely used for practical estimates of temperature profiles along the wellbore and temperature at the wellhead. A unified formula for the outflow (inflow) of heat into the rock is proposed, which is used to estimate heat losses from the wellbore and the temperature profile along the wellbore after the initial period, after reaching the steady state.

Keywords: rocks, water injection, heat transfer

For citation: Alishaev M. G., Aliverdiev A. A., Beibalaev V. D. Asymptotics of heating of rocks by a production well // Vestnik NovSU. 2023. 3(132). 438-445. DOI: 10.34680/2076-8052.2023.3(132).438-445

Введение

Добыча нефти, газа и термальной воды, как правило, происходит со значительных глубин, порядка 2-5 км. На таких глубинах горные породы и содержащаяся в проницаемых пластах нефть, вода и газ прогреты до температур

пород, примерно до 70-160 °С. Горячий поток вверх по скважине нефти, газа, добываемой термальной воды прогревает горную породу вокруг скважины на всём протяжении ствола, однако распространение тепла в поперечном горизонтальном направлении за длительное время измеряется лишь десятками метров из-за малых значений теплопроводности горной породы и малого радиуса скважины.

Внешний радиус колонны скважины R_c обычно около 0,1 м и менее. При глубине несколько тысяч метров отношение горизонтального размера к вертикальному размеру имеет порядок 10^{-4} . При таком соотношении размеров вертикальным потоком тепла можно пренебречь по сравнению с горизонтальным потоком, т. е. можно считать, что распространение температурных возмущений от скважины происходит только в горизонтальном направлении. Вертикальные изменения определяют наслоение и наложение множества решений плоских задач.

Основная часть

Ось скважины примем за вертикальную координатную ось Oz , направим её вверх от забоя. Задачу распространения температуры в однородном горном массиве можно считать плоской для каждого фиксированного значения z и описать её уравнением в безразмерных переменных (время заменено числом Фурье τ , радиальная координата отнесена к радиусу колонны скважины)

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad r > 1, \quad \tau > 0, \quad T(r, 0) = T(\infty, \tau) = T_\Gamma, \quad T(1, \tau) = T_s(\tau), \quad \tau = \frac{at}{R_c^2}. \quad (1)$$

Здесь T_Γ – начальное невозмущенное значение температуры горной породы вдали от скважины, которое с изменением глубины возрастает в среднем 3°С на 100 метров. $T_s(\tau)$ – заданная на поверхности скважины температура. Она меньше температуры термальной воды в пластовых условиях, выше температуры горной породы, и по истечению некоторого времени сохраняется почти постоянной. Температуропроводность горной породы a зависит от типа горной породы и для наиболее распространённых пород меняется в пределах от 10 до 40 м²/год при среднем значении 20 м²/год.

Сведение трехмерной задачи к двумерной – приём, хорошо известный в горной теплофизике. Ловерье [1] предложил для определения изменений температуры тонкого пласта из-за нагнетания горячей воды считать отток тепла в кровлю и подошву по одномерной схеме, пренебрегая горизонтальной составляющей теплового потока в горной породе. Такой подход получил широкое признание [2-4]. Аналогичный подход применялся и в ракетостроении (закон плоских сечений А. А. Ильюшина, 1947 г.). Согласно ему частицы воздуха при прохождении ракеты остаются в одной и той же плоскости, перпендикулярной оси ракеты. В нашем случае обоснование постановки задачи (1) более тривиально: если бы мы и записали член со второй производной по вертикальной координате z , то после перехода к безразмерным переменным при нём появился бы множитель, равный

квадрату отношения радиуса скважины к её глубине порядка 10^{-8} . Нет смысла в сохранении такого малого слагаемого.

Профиль температуры в случае постоянной температурной репрессии представим [5] в виде логарифмической функции с подвижным фронтом распространения возмущения $R(\tau)$:

$$T(r, \tau) = \Delta T_0 \frac{\ln \frac{r}{R} + 1}{\ln \frac{1}{R} + 1}, \quad 1 \leq r \leq R(\tau); \quad T(r, \tau) = 0, \quad r \geq R(\tau) \quad (2)$$

На фронте возмущения и температура, и её первая производная по радиальной координате обращаются в нуль. Для определения закона распространения фронта возмущения $R(\tau)$ пользуемся лишь одним интегральным соотношением, полученным из (1) интегрированием дифференциального уравнения по области возмущения, после его умножения на rdr . Полученную для $R(\tau)$ задачу удобно представить в обратном виде:

$$\frac{d\tau}{dR} = \frac{R \ln R + 1 - R}{3(R-1)} \cdot \frac{d}{dR} \left(\frac{R^3 - 1,5R \ln R - 1}{R \ln R - R + 1} \right), \quad \tau(1) = 0 \quad (3)$$

При решении (3) численно можно ожидать представления фронта распространения возмущения в виде $R(\tau) \approx 1.81\sqrt{\tau}$. Однако, для малых времён решение (3) намного отличается от асимптотики.

Попытки видоизменить метод интегральных соотношений введением новых параметров и новых интегралов к желаемым результатам не привели. Наиболее удачным оказался не профиль (2), а обрезанная его часть, когда и в числителе, и в знаменателе берутся только логарифмы, как для установившегося режима. Тогда производная по радиальной координате не обращается в нуль на фронте возмущения. Интегральное соотношение баланса тепла не выводится из дифференциального уравнения, а записывается без учета оттока тепла на фронте, и аналог (3) имеет более простой вид:

$$T(r, \tau) = \Delta T_0 \left(1 - \frac{\ln r}{\ln R} \right), \quad q(\tau) = \frac{2\pi\lambda\Delta T_0}{\ln R}, \quad \frac{d\tau}{dR} = \frac{\ln R}{2} \cdot \frac{d}{dR} \frac{R^2 - 1}{\ln R^2}, \quad \tau(1) = 0. \quad (4)$$

Решение задачи (4) теперь показывает, что фронт возмущения движется по закону $R \approx 2.08\sqrt{\tau}$, что весьма близко к обычно применяемому правилу: $R = 2\sqrt{\tau}$.

Находим теперь профиль температуры воды в скважине от забоя до устья при длительной её работе, применяя найденную выше асимптотику оттока тепла. Принимаем профиль установившимся и температурные изменения вдоль ствола обусловленными только оттоком тепла в горную породу. Дифференциальное уравнение будет иметь вид:

$$c_B q_B \frac{dT_c}{dz} + \frac{2\pi\lambda_r}{\ln(1,675\sqrt{\tau})} (T_c - T_r) = 0, \quad T_r = T_{пл} - (T_{пл} - T_0) \frac{z}{H}, \\ 0 \leq z \leq H, \quad T_c(0) = T_{пл}. \quad (5)$$

Здесь обозначения общепринятые: c_e – объёмная теплоёмкость воды (4.19 МДж/м³·К); q_e – дебит скважины (м³/сутки); $T_c(z)$ – температура воды в скважине; $T_a(z)$ – температура горной породы вдали от скважины; $T_{пл}$ – пластовая температура; T_0 – температура нейтрального слоя (среднегодовая температура поверхности земли), H – глубина скважины; τ – число Фурье, определяемое как отношение at/R_c^2 .

Профиль температуры по стволу скважины удобно представить в форме:

$$\frac{T_c(z)-T_a(z)}{T_{пл}-T_0} = \frac{1-e^{-\alpha z/H}}{\alpha}. \quad (6)$$

где

$$\alpha = \frac{2\pi\lambda_r H}{c_B q_B \ln(1,675\sqrt{\tau})}, \quad \tau = \frac{at}{R_c^2}. \quad (7)$$

При $z = H$

$$\frac{T_y-T_0}{T_{пл}-T_0} = \frac{1-e^{-\alpha}}{\alpha}. \quad (8)$$

Значения логарифма в знаменателе слабо растут со временем. При $a=20$ м²/год для времён 1 год, 5 лет и 25 лет эти значения составляют 4.32; 5.12 и 5.93. Соответственно и параметр α будет уменьшаться, но порядок величин сохраняется. Например, для $H=300$ м, $\lambda_e=2.5$ Вт/м·К, $q_e=300$ м³/сутки формула (6) дает $\alpha=0.75$; 0.63 и 0.55 соответственно на время 1 год; 5 лет и 25 лет. При малых дебитах, например, для 30 м³/сутки, значения параметра были бы $\alpha=7.5$; 6.3 и 5.5.

Превышение температуры на устье скважины над температурой нейтрального слоя определяется всецело параметром α и геотермальным градиентом. Для значений $\alpha=0.1$; 0.5; 1; 2 и 5 превышение температуры на устье (T_y-T_0) составляет соответственно 0.95; 0.79; 0.63; 0.43 и 0.2 от общего температурного перепада ($T_{пл}-T_0$). Профиль температуры состоит из линейной части и экспоненты, причём с ростом α профиль всё более становится линейным.

В переходной период, когда ещё нет выхода на асимптотику, приходится считаться с необходимостью решения задачи в полной постановке, сначала решать задачу методом преобразования Лапласа в изображениях, а затем пользоваться методами численного обращения. В этой задаче такой подход удобнее, нежели применение разностных методов.

Полная постановка отличается от асимптотической постановки (6) наличием ещё производной по времени от температуры в стволе скважины. Отток тепла в горную породу меняется в начальный период значительно, он сначала возрастает от нуля до некоторого значения, затем убывает и выходит на асимптоту. Нарастание температуры в элементе ствола скважины происходит за счёт притока новых более горячих порций воды и оттока тепла в горную породу. В размерном виде

дифференциальное уравнение для неустановившейся температуры в стволе задачи выглядит следующим образом:

$$\pi R_c^2 c_K \frac{\partial T_c}{\partial t} + c_B q_B \frac{\partial T_c}{\partial z} = -q_T, \quad q_T = -2\pi R_c \lambda_r \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R_c}, \quad 0 \leq z \leq H, \quad t > 0. \quad (9)$$

В формуле (9): c_K – удельная объёмная теплоёмкость на 1 м длины колонны скважины, она включает в себя теплоёмкость воды и металла; R_c – внешний радиус обсадной колонны; $(R_c - \delta)$ – внутренний радиус скважины; c_B – объёмная теплоёмкость воды; q_B – дебит скважины; q_T – отток тепла в горную породу; λ_r – теплопроводность горной породы. Начальные и граничные условия задачи следует принять в виде:

$$T_c(z, 0) = T_r(z) = T_{пл} - \Gamma z, \quad T_c(0, t) = T_{пл}. \quad (10)$$

где Γ – геотермальный градиент.

Причём температура горной породы будет участвовать неявно и при определении оттока тепла q_T от колонны скважины в горную породу.

Задачу (9) решаем с применением преобразованием Лапласа, предварительно приводя её к безразмерному виду. Естественно, в качестве безразмерного времени выбрать τ , подсчитанное по температуропроводности a горной породы и внешнему радиусу колонны, чтобы было согласие с уже решённой выше задачей (1) оттока тепла от колонны скважины в горную породу в изображениях. Линейные размеры по координатам выбираем разные, равные соответственно R_c по радиусу и H (глубина залегания продуктивного пласта) по вертикали. Старые обозначения переменных сохраняем для упрощения письма. В качестве температурного масштаба естественно принять разность температур пласта и нейтрального слоя $T_{пл} - T_0$, но мы оставляем размерную температуру. Описание задачи в физических переменных принимает вид:

$$\frac{\pi a c_K H}{c_B q_B} \cdot \frac{\partial (T_c(z, \tau) - T_r(z))}{\partial \tau} + \frac{\partial (T_c(z, \tau) - T_r(z))}{\partial z} - (T_{пл} - T_0) = \frac{2\pi \lambda_r H}{c_B q_B} \cdot \left. \frac{\partial (T(z, \tau) - T_r(z))}{\partial r} \right|_{r=1}. \quad (11)$$

Причём для начального момента времени $\tau=0$ разности $(T_c - T_r)$ и $(T - T_r)$ равны нулю, и на границе $z=0$ разность $(T_c - T_r)$ сохраняет нулевое значение. Эту задачу надо решать совместно с (1), в которой вертикальная координата участвует неявно. Температура на устье при $z=1$ и профили температур $T_c(z)$ мы получим из совместного решения задач (1) и (11). Это решение задачи определяется двумя безразмерными параметрами:

$$\alpha_K = \frac{\pi a c_K H}{c_B q_B}, \quad \alpha_r = \frac{2\pi \lambda_r H}{c_B q_B}, \quad (12)$$

характерные значения которых близки к 1. Например, для $H=3000$ м и $q_B=1000$ м³/сутки при $a=20$ м²/год и $\lambda_r=2,5$ Вт/м·К получаем $\alpha_K \approx 0,5$ и $\alpha_r \approx 1$.

Введя изображения по Лапласу

$$\Theta(r, z, s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} (T(r, z, \tau) - T_r(z)) d\tau, \quad \Theta_c(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} (T_c(z, \tau) - T_r(z)) d\tau, \quad (13)$$

получим в них задачу:

$$\Theta(r, z, s) = \frac{K_0(\sqrt{s}r)}{K_0(\sqrt{s})} \cdot \Theta_c(z, s), \quad \alpha_K s \cdot \Theta_c(z, s) + \frac{d\Theta_c}{dz} - \frac{T_{пл} - T_0}{s} = \alpha_r \frac{\partial \Theta}{\partial r} \Big|_{r=1}. \quad (14)$$

Её решение имеет вид:

$$\Theta_c(z, s) = (T_{пл} - T_0) \frac{1 - e^{-\omega(s)z}}{s\omega(s)}, \quad \omega(s) = \alpha_K s + \alpha_r \sqrt{s} \frac{K_1(\sqrt{s})}{K_0(\sqrt{s})}. \quad (15)$$

Однако, чтобы получить профили температур в пределах $0 \leq z \leq 1$, нужно найти оригинал по изображению (15). Общий поток тепла в горную породу определится снижением температуры от забоя $z=0$ до устья $z=1$. Поэтому имеет смысл ограничиться отысканием обращения $\Theta_c(1, s)$ для наиболее интересных вариантов α_K и α_r .

Обращение $\Theta_c(1, s)$ даст температуру воды на устье скважины:

$$\frac{T_y - T_0}{T_{пл} - T_0} = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{e^{i\phi} (1 - e^{-\omega_\phi(\phi, \tau)})}}{\omega_\phi(\phi, \tau)} \right\} d\phi - \int_0^\infty \operatorname{Im} \left\{ \frac{e^{-x+i(1 - e^{-\omega_x(x, \tau)})}}{(-x+i)\omega_x(x, \tau)} \right\} dx \right), \quad (16)$$

где

$$\omega_x(x, \tau) = \alpha_K \frac{-x+i}{\tau} + \alpha_r \sqrt{\frac{-x+i}{\tau}} \frac{K_1\left(\sqrt{\frac{-x+i}{\tau}}\right)}{K_0\left(\sqrt{\frac{-x+i}{\tau}}\right)}, \quad \omega_\phi(\phi, \tau) = \alpha_K \frac{e^{i\phi}}{\tau} + \alpha_r \sqrt{\frac{e^{i\phi}}{\tau}} \frac{K_1\left(\sqrt{\frac{e^{i\phi}}{\tau}}\right)}{K_0\left(\sqrt{\frac{e^{i\phi}}{\tau}}\right)}. \quad (17)$$

В таком виде среда Mathcad хорошо справляется со всеми вычислениями. При этом для улучшения сходимости при малых τ , бесконечный предел приходится заменять конечным значением.

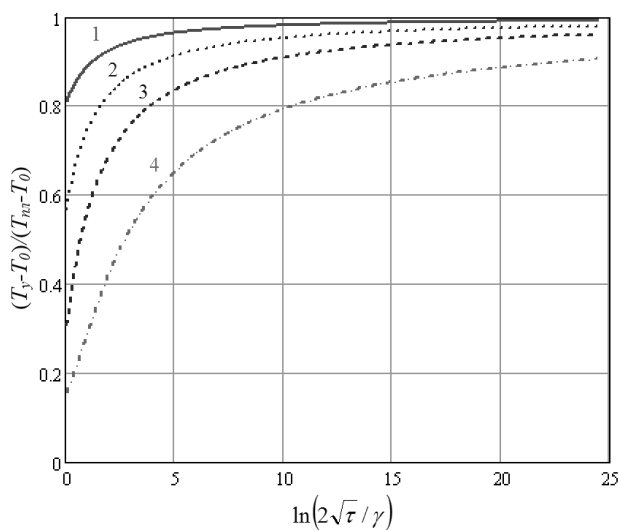


Рисунок 1. Рост температуры на устье скважины после её пуска. По оси абсцисс отложены значения $\ln(2\sqrt{\tau}/\gamma)$, по оси ординат отношение $(T_y - T_0)/(T_{пл} - T_0)$. Варианты соответствуют значениям параметров: $(\alpha_K, \alpha_r) = (0.2, 0.4); (0.5, 1); (1, 2);$ и $(0.2, 5)$ ((1), (2), (3) и (4) соответственно)

На рисунке 1 представлены графики относительной температуры на устье для четырёх различных вариантов параметров: $(\alpha_K, \alpha_r) = (0.2, 0.4); (0.5, 1); (1, 2);$ и $(0.2, 5)$.

Видно, что по истечению долгого времени температура на устье сходится к значению пластовой температуры, но сходимость является весьма слабой для горных пород с высоким значением температуропроводности.

Заключение

В заключение отметим, что представленный в настоящей работе подход численного обращения преобразования Лапласа с контурным интегрированием для больших времён оказывается намного эффективнее, чем применение конечно разностных методов [6, 7].

Литература

1. Lauwerier H. A. The transport of heat in an oil layer caused by the injection of hot fluid // Applied Scientific Research Section. 1955. 5(2-3). 145-150. DOI: 10.1007/BF03184614
2. Алишаев М. Г., Розенберг М. Д., Теслюк Е. В. Неизотермическая фильтрация при разработке нефтяных месторождений / под редакцией Г. Г. Вахитова. Москва, Недра, 1985. 271 с.
3. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. Москва, Наука, 1965. 287 с.
4. Басниев К. С., Власов А. М., Кочина И. Н., Максимов В. М. Подземная гидравлика: учебник для вузов. Москва, Недра, 1986. 303 с.
5. Алхасов А. Б., Алишаев М. Г. Скважинный теплообменник для съёма тепла с горной породы // Возобновляемая энергетика: проблемы и перспективы: материалы Международной конференции: к 25-летию Института проблем геотермии Дагестанского научного центра РАН, Махачкала, 19–22 сентября 2005 года: в 2-х т. Т. 1. Махачкала, 2005. 263-275.
6. Крылов В. И., Скобля Н. С. Методы приближённого преобразования Фурье и обращения преобразования Лапласа: справочная книга. Москва, Наука, 1974. 223 с.
7. Иванов Н. М., Музыченко В. П. Экономичный вариант численного обращения преобразования Лапласа // Журнал вычислительной математики и вычислительная физика. 1983. 23(4). 992-994.
8. Андрейченко Д. К. Эффективный алгоритм численного обращения интегрального преобразования Лапласа // Журнал вычислительной математики и вычислительная физика. 2000. 40(7). 1030-1044.

References

1. Lauwerier H. A. The transport of heat in an oil layer caused by the injection of hot fluid // Applied Scientific Research Section. 1955. 5(2-3). 145-150. DOI: 10.1007/BF03184614
2. Alishaev M. G., Rozenberg M. D., Teslyuk E. V. Neizotermicheskaya fil'tratsiya pri razrabotke neftyanykh mestorozhdeniy [Non-isothermal filtration in the development of oil fields]. Ed. G. G. Vakhitov. Moscow, Nedra Publ., 1985. 271 p.
3. Doetsch G. Rukovodstvo k prakticheskomu primeneniyu preobrazovaniya Laplasa [Guide to the Applications of Laplace Transforms]. Moscow, Nauka Publ., 1965. 287 p.
4. Basniev K. S., Vlasov A. M., Kochina I. N., Maksimov V. M. Podzemnaya gidravlika: uchebnik dlya vuzov [Underground hydraulics: a textbook for universities]. Moscow, Nedra Publ., 1986. 303 p.

5. Alkhasov A. B., Alishaev M. G. Skvazhinnyy teploobmennik dlya s'yoma tepla s gornoy porody [Borehole heat exchanger for heat removal from rock] // Renewable energy: problems and prospects: materials of the International Conference: on the 25th anniversary of the Institute of Geothermal Problems of the Dagestan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Makhachkala, September 19–22, 2005: in 2 volumes. Vol. 1. Makhachkala, 2005. P. 263-275.

6. Krylov V. I., Skoblya N. S. Metody priblizhonnogo preobrazovaniya Fur'ye i obrashcheniya preobrazovaniya Laplasa: spravochная kniga [Methods of approximate Fourier transformation and inversion of Laplace transformation: a reference book]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 223 p.

7. Ivanov N. M., Muzychenko V. P. Ekonomichnyy variant chislennogo obrashcheniya preobrazovaniya Laplasa [An economical version of the numerical inversion of the Laplace transform] // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1983. 23(4). 992-994.

8. Andreichenko D. K. Effektivnyy algoritm chislennogo obrashcheniya integral'nogo preobrazovaniya Laplasa [Efficient algorithm for the numerical inversion of the Laplace integral transform] // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2000. 40(7). 1030-1044.

Информация об авторах

Алишаев Мухтар Гусейнович – доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник Института проблем геотермии и возобновляемой энергетики – филиал ОИВТ РАН (Махачкала, Россия), ORCID: 0009-0003-9554-5141, alishaev@rambler.ru

Аливердиев Абутраб Александрович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор, Дагестанский государственный университет (Махачкала, Россия); главный научный сотрудник Института проблем геотермии и возобновляемой энергетики – филиал ОИВТ РАН (Махачкала, Россия), ORCID: 0000-0003-1650-3633, aliverdi@mail.ru

Бейбалаев Ветлугин Джабраилович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент, Дагестанский государственный университет (Махачкала, Россия); старший научный сотрудник Института проблем геотермии и возобновляемой энергетики – филиал ОИВТ РАН (Махачкала, Россия), ORCID: 0000-0002-4881-9264, kaspjij_03@mail.ru