

АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ КАК ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО НЕЛОКАЛЬНОЙ АНОМАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ

В.В.Учайкин

AUTOMODELITY AS A CHARACTERISTIC PROPERTY OF NONLOCAL ANOMALOUS DIFFUSION

V.V.Uchaikin

Ульяновский государственный университет, vuchaikin@gmail.com

Краткое (на популярном уровне) изложение связи между негауссовым семейством устойчивых законов и самоподобием описываемых ими нелокальных процессов. Характеристическое свойство самоподобия позволяет расположить баллистическую, броуновскую и Леви-модель движения в логически связанную цепочку с характеристическими показателями $\alpha = 1, 2$ и $0 < \alpha < 2$, определяющими степени дифференциальных операторов, которые описывают эти движения. Семейство моделей, порождаемых дробными значениями α , характеризуется специфическим свойством нелокальности, отражающимся в физической интерпретации в терминах фрактальности, если речь идет о пространственной производной, и эрeditaryность — в случае дифференцирования по времени.

Ключевые слова: диффузия, случайные блуждания, устойчивые законы, дробные производные

Для цитирования: Учайкин В.В. Автомоделность как характеристическое свойство нелокальной аномальной диффузии // Вестник НовГУ. Сер.: Технические науки. 2021. №2(123). С.43-46. DOI: [https://doi.org/10.34680/2076-8052.2021.2\(123\).43-46](https://doi.org/10.34680/2076-8052.2021.2(123).43-46)

A brief presentation of the relationship between a non-Gaussian family of stable laws and the self-similarity of the nonlocal processes described by them. The characteristic property of self-similarity makes it possible to arrange the ballistic, Brownian, and Levy-models of motion in a logically connected chain with characteristic exponents $\alpha = 1, 2$ and $0 < \alpha < 2$, which determine the degrees of differential operators describing these movements. The family of models generated by fractional values of α is characterized by a specific property of nonlocality, which is reflected in the physical interpretation in terms of fractality, if we are talking about the spatial derivative, and heredity, in the case of time-differentiation.

Keywords: diffusion, random walks, stable laws, fractional derivatives

For citation: Uchaikin V.V. Automodelity as a characteristic property of nonlocal anomalous diffusion // Vestnik NovSU. Issue: Engineering Sciences. 2021. №2(123). P.43-46. DOI: [https://doi.org/10.34680/2076-8052.2021.2\(123\).43-46](https://doi.org/10.34680/2076-8052.2021.2(123).43-46)

1. Автомоделность

На первый взгляд, нет ничего общего между динамическим типом движения, когда частица движется по гладкой кривой (например, по прямой) в пространстве, и стохастическим типом, когда траектория представляет собой чрезвычайно нерегулярную, всюду изломанную линию (пример — броуновская траектория). Однако общее, по крайней мере, между прямой и броуновской кривой, есть. Для обоих типов движения нет больших и малых времен, они *автомоделны*. Прямая остается прямой на всех масштабах, как и броуновская траектория остается броуновской.

Автомоделность (самоподобие, масштабная инвариантность, скейлинг — это все синонимы автомоделности) — особая симметрия системы, состоящая в том, что изменение масштабов одних переменных может быть скомпенсировано преобразованием масштабов других [1]. Постоянная H , называемая показателем Херста, определяет порядок автомоделности.

В терминах случайной переменной $X(t)$ (для простоты ограничиваемся одномерным процессом) свойство автомоделности формулируется в виде

$$X(t) \stackrel{d}{=} t^H X(1),$$

или

$$X(at) \stackrel{d}{=} a^H X(t),$$

при $a > 0$ и любом фиксированном t . Вообще, случайный процесс $\{X(t), T\}$ называется автомоделным, если автомоделны распределения всех его конечномерных векторов:

$$(X(at_1), \dots, X(at_n)) \stackrel{d}{=} (a^H X(t_1), \dots, a^H X(t_n))$$

Для автомоделности же однородного марковского процесса достаточно автомоделности одномерного распределения.

Автомоделность одновременной плотности распределения $p(x, t)$ выражается соотношением

$$p(x, t) = t^{-H} p(xt^{-H}, 1).$$

В баллистическом движении со скоростью v

$$X(t) = vt$$

и

$$X(at) = avt = a^H X(t), H = 1.$$

В броуновском движении с коэффициентом диффузии K

$$X(t) \stackrel{d}{=} \sqrt{2Kt} G$$

и

$$X(at) \stackrel{d}{=} \sqrt{2Kat} G = a^{1/2} X(t), H = 1/2.$$

В представлении плотности это свойство выражается соотношением:

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2Kt}} e^{-x^2/4Kt} = t^{-H} p(xt^{-H}, 1).$$

На самом деле существует целое семейство автомодельных процессов, по отношению к которому баллистическое и броуновское движения оказываются частными случаями.

2. Леви-процессы

Определим теперь L -процесс как однородный марковский процесс с α -автомодельным одномерным распределением

$$p(x, t) = t^{-1/\alpha} g^{(\alpha)}(xt^{-1/\alpha}),$$

где $\alpha = 1/H$, а $g^{(\alpha)}(x)$ — неизвестная пока плотность распределения.

Очевидно, что такая замена не может привести к сужению класса рассматриваемых процессов: броуновское движение удовлетворяет этому условию и остается в классе L с $\alpha = 2$. Появятся ли при этом какие-то новые процессы? Ответ на этот вопрос связан с тем, существуют или нет отличные от гауссова распределения $p(x, t)$ L -процесса, удовлетворяющие условию автомодельности.

Рассмотрим два момента времени: t и $t + \tau$. Случайные координаты L -процесса частицы в эти моменты связаны соотношением

$$X(t + \tau) = X(t) + X(\tau).$$

При условии $X(0) = 0$ случайные величины $X(t)$ и $X(\tau)$ являются приращениями процесса в непересекающихся интервалах $(0, t)$ и $(t, t + \tau)$ и, стало быть, независимы. Плотность распределения их суммы дается сверткой плотностей слагаемых:

$$p(x, t + \tau) = p(x, t) * p(x, \tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} p(x - x', t) p(x', \tau) dx'.$$

Удобно от плотностей перейти к характеристическим функциям

$$\tilde{p}(k, t) = \langle \exp\{ikX(t)\} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} p(x, t) dx,$$

для которых операция свертки превращается в произведение

$$\tilde{p}(k, t + \tau) = \tilde{p}(k, t) \tilde{p}(k, \tau),$$

а условие автомодельности принимает вид

$$\tilde{p}(k, t) = \tilde{g}^{(\alpha)}(kt^{1/\alpha}).$$

3. Устойчивые законы

Полученные выше соотношения приводят к функциональному уравнению

$$\tilde{g}^{(\alpha)}(k(t + \tau)^{1/\alpha}) = \tilde{g}^{(\alpha)}(kt^{1/\alpha}) \tilde{g}^{(\alpha)}(k\tau^{1/\alpha}),$$

определяющему класс *строго устойчивых законов*, называемых далее для краткости просто устойчивыми. Характеристические функции $\tilde{g}^{(\alpha)}(k)$ выражаются в элементарных функциях и могут быть записаны в нескольких формах [2].

Как отмечалось выше, винеровский процесс входит в класс L -процессов. Он характеризуется нормальным распределением с плотностью

$$g^{(2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/4)$$

и характеристической функцией

$$\tilde{g}^{(2)}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} g(x, 2) dx = \exp(-k^2).$$

Чтобы найти характеристические функции остальных членов этого семейства, введем вторую характеристику

$$\psi^{(\alpha)}(k) = \ln \tilde{g}^{(\alpha)}(k),$$

для которой свойство устойчивости эквивалентно аддитивности

$$\psi^{(\alpha)}(c_1 k) + \psi^{(\alpha)}(c_2 k) = \psi^{(\alpha)}(ck),$$

где

$$c = (c_1^\alpha + c_2^\alpha)^{1/\alpha}.$$

Распространяя это соотношение на сумму произвольного числа n одинаково распределенных слагаемых ($c_1 = c_2 = \dots = c_n = 1$), получим

$$n\psi^{(\alpha)}(k) = \psi^{(\alpha)}(n^{1/\alpha}k).$$

Согласно свойству

$$\psi^{(\alpha)}(-k) = [\psi^{(\alpha)}(k)]^*,$$

(здесь $*$ означает комплексное сопряжение) достаточно определить функцию $\psi^{(\alpha)}(k)$ для положительных значений аргумента $k > 0$. Учитывая ее непрерывность в окрестности начала координат и вытекающее из определения характеристической функции условие

$$\psi^{(\alpha)}(0) = 0,$$

приходим к равенству

$$|\psi^{(\alpha)}(k)| = \text{const} \cdot k^\alpha, \quad (k > 0, \alpha > 0),$$

из которого следует, что

$$\psi^{(\alpha)}(k) = -k^\alpha [c_0 - ic_1].$$

Характеристическая функция удовлетворяет условию

$$|\tilde{g}(k)| \leq 1,$$

поэтому

$$\text{Re} \psi^{(\alpha)}(k) \leq 0,$$

и вещественная постоянная c_0 должна быть положительной. С другой стороны, из условия

$$\tilde{g}''(0) = -\langle S^2 \rangle$$

(здесь S — случайная величина с характеристической функцией $\tilde{g}(k)$) следует, что

$$[\psi^{(\alpha)}]''(0) = -\langle S^2 \rangle + \langle S^2 \rangle \equiv -D \leq 0.$$

Вычислив вторую производную,

$$[\psi^{(\alpha)}(k)]'' = -[c_0 - ic_1]\alpha(\alpha - 1)k^{\alpha-2},$$

и устремив $k \rightarrow 0$, можно убедиться, что при $\alpha = 2$ дисперсия D конечна (вследствие вещественности последней постоянная c_1 должна быть равна нулю), при $\alpha < 2$ она бесконечна (в этом случае величина c_1 роли не играет), и при $\alpha > 2$ предельное значение производной равно нулю. Последнее означает, что второй момент функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 g(x) dx = 0.$$

Для не сосредоточенного в нуле распределения это может означать только, что произведение $x^2 g(x)$ является знакопеременным, и, стало быть, $g(x)$ не является плотностью вероятности. Таким образом, область допустимых значений параметра α есть $(0, 2]$.

Постоянные c_0 и c_1 могут быть представлены в нескольких формах. В одной из них

$$c_0 = 1, \quad c_1 = \beta \text{tg}(\alpha\pi/2),$$

где второй вещественный параметр $\beta \in [-1, 1]$ характеризует асимметрию распределения. Таким образом, характеристическая функция одномерного устойчивого закона на положительной полуоси имеет вид:

$$\tilde{g}^{(\alpha, \beta)}(k) = \exp\{-k^\alpha [1 - i\beta \operatorname{tg}(\alpha\pi/2)]\}, \quad k > 0.$$

Аналогичные вычисления для отрицательной полуоси дают

$$\tilde{g}^{(\alpha, \beta)}(k) = \exp\{-(-k)^\alpha [1 + i\beta \operatorname{tg}(\alpha\pi/2)]\}, \quad k < 0.$$

Объединяя эти формулы в одну, получим:

$$\tilde{g}^{(\alpha, \beta)}(k) = \exp\{-|k|^\alpha [1 - i\beta \operatorname{tg}(\alpha\pi/2) \operatorname{sign} k]\}, \quad -\infty < k < \infty. \quad (\text{A})$$

Это стандартное представление устойчивой характеристической функции в форме А.

Часто используется представление в форме С, получаемое введением в показатель экспоненты масштабного множителя, подобранного таким образом, чтобы характеристическая функция приняла вид

$$\tilde{g}(k; \alpha, \theta) = \exp\{-|k|^\alpha \exp[-i(\theta\pi/2) \operatorname{sign} k]\}, \quad (\text{C})$$

Здесь $\alpha \in [0, 2]$ — характеристический показатель устойчивого закона, а $\beta \in [-1, 1]$ и $\theta \in [-\theta_\alpha, \theta_\alpha]$, $\theta_\alpha = \min\{1, 2/\alpha - 1\}$ — параметры асимметрии.

Задаваемые этими характеристическими функциями *устойчивые случайные величины* будем обозначать через $S^{(\alpha, \beta)}$ и $S(\alpha, \theta)$ соответственно.

4. Обобщенная предельная теорема

Открытие Полем Леви класса устойчивых распределений, возможно, было одним из самых крупных событий в теории вероятностей XX в. Они освободили ЦПТ от ограничения, налагаемого требованием конечности дисперсии, и открыли возможность суммирования случайных величин с бесконечными дисперсиями. Оказалось, что если только существует невырожденное (не сосредоточенное в одной точке) предельное распределение нормированной суммы $(\sum_{j=1}^n X_j - A_n)/B_n$ при $n \rightarrow \infty$ и подходящим образом выбранных последовательностях A_n и $B_n > 0$, то это распределение обязательно будет устойчивым. При этом $B_n = h(n)n^{1/\alpha}$, где $h(n)$ — медленно меняющаяся функция (типа логарифма или какой-нибудь его степени), а α — характеристический показатель. Если для случайной величины X с функцией распределения $F(x)$ можно подобрать такие A_n и B_n , то говорят, что X принадлежит области притяжения устойчивого закона. В противном случае она не принадлежит области притяжения никакого закона: только устойчивые законы обладают областями притяжения.

Чтобы проверить, принадлежит ли области притяжения случайная величина X , надо, прежде всего, вычислить дисперсию или просто второй момент $\langle X^2 \rangle$. Если он конечен, X находится в области притяжения нормального закона. Если $\langle X^2 \rangle = \infty$, необходимо проверить асимптотику «хвостов» распределения X . Если оказывается, что

$$P(|X| > x) \sim h(x)x^{-\alpha}, \quad x \rightarrow \infty,$$

то ответ положительный, если же асимптотика имеет иной вид, ответ отрицательный. Мы ограничимся далее лишь случаем «нормального» (не путать с гауссовым!) притяжения, когда $h(x) \rightarrow \text{const} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Пусть теперь известно, что X принадлежит области притяжения устойчивого закона. Как узнать его параметры α и β (или θ)? Ответ на этот вопрос как раз и дает

Обобщенная предельная теорема (ОПТ).

Пусть случайные величины X_j независимы, одинаково распределены и удовлетворяют условиям

$$P(X > x) \sim a_+ x^{-\alpha}, \quad x \rightarrow \infty,$$

$$P(X < -x) \sim a_- x^{-\alpha}, \quad x \rightarrow \infty,$$

$0 < \alpha \leq 2$, $a_+ \geq 0$, $a_- \geq 0$ и $a_+ + a_- > 0$. Тогда найдутся такие последовательности A_n и $B_n > 0$, что при $n \rightarrow \infty$

$$\left(\sum_{j=1}^n X_j - A_n\right)/B_n \xrightarrow{d} S^{(\alpha, \beta)},$$

где $\beta = (a_+ - a_-)/(a_+ + a_-)$.

Разумеется, существует бесконечное множество последовательностей нормирующих коэффициентов A_n и B_n с одним и тем же асимптотическим поведением при $n \rightarrow \infty$.

5. Аномальная диффузия

Термин «аномальная диффузия» применяется в случае, если ширина диффузионного пакета Δt увеличивается со временем медленнее или быстрее, чем в нормальном (гауссовом) случае, когда $\Delta t \propto t^{1/2}$. В последние десятилетия исследуются разнообразные процессы аномальной диффузии: перенос заряда в аморфных полупроводниках, динамика полимерных систем, диффузия на фрактальных структурах, процессы в квантовой оптике, плазме и т.д. (см [4]).

Хорошо известно, что, несмотря на многообразие конкретных механизмов, приводящих к нормальным диффузионным процессам, главная особенность этих процессов может быть получена в рамках схемы скачкообразного ступенчатого процесса с непрерывным временем (в зарубежной литературе этот процесс обозначается аббревиатурой CTRW — *continuous time random walk*). Это позволяет надеяться, что CTRW-модель может также описать некоторые общие особенности большого числа различных аномальных процессов без рассмотрения их специфических механизмов.

Простейшая (одномерная) версия CTRW-модели предполагает, что длины различных прыжков R_j , а также времена пребывания в ловушках T_j представляют собой набор взаимно независимых случайных величин. Предполагается, что свободные пробеги имеют распределение со степенным хвостом

$$P\{R > r\} \propto r^{-\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad r \rightarrow \infty,$$

распределение времен пребывания в ловушках удовлетворяет условию

$$P\{T > t\} \propto t^{-\beta}, \quad \beta > 0, \quad t \rightarrow \infty.$$

Понятие диффузия используется, когда речь идет об асимптотическом поведении этого процесса при $t \rightarrow \infty$. Если $\alpha > 2$ и $\beta > 1$ мы наблюдаем нормальную диффузию, все остальные значения α и β приводят к аномальной диффузии с характеристическими показателями α, β .

Возможно, самый простой способ выйти на асимптотику рассматриваемого процесса, отталкиваясь от трансформанты

$$\tilde{p}(k, \lambda) = \frac{1 - \tilde{q}(\lambda)}{\lambda[1 - \tilde{q}(\lambda)\tilde{p}(k)]},$$

заключается в использовании в качестве $p(x)$ и $q(t)$ самих устойчивых плотностей $g(x; \alpha, \theta)$ и $g(x; \omega, 1)$, $0 < \alpha \leq 2$, $\omega \leq 1$. Законность такой подстановки обусловлена тем, что каждый устойчивый закон принадлежит своей области притяжения. Тем самым условие теоремы об аномальной диффузии выполняется. В то же время асимптотическое выражение $p(x, t)$ определяется только асимптотиками функций $p(x)$ и $q(t)$, а все распределения, принадлежащие фиксированной области притяжения, в том числе и устойчивое, имеют одну и ту же (с точностью до постоянного множителя) асимптотику. Следовательно, выбирая в качестве $p(x)$ и $q(t)$ устойчивые плотности, мы нисколько не теряем в общности.

Согласно тауберовым теоремам, в восстановлении распределения $p(x, t)$ при больших x и t основную роль играет поведение трансформанты Фурье—Лапласа $\tilde{p}(k, \lambda)$ в области малых значений аргументов, где

$$\tilde{p}(k) = \tilde{g}(k; \alpha, \theta) = \exp\{-|k|^\alpha \exp[-i\alpha\theta\pi/2 \operatorname{sign} k]\} \sim 1 - |k|^\alpha \exp\{-i\alpha\theta\pi/2 \operatorname{sign} k\}, \quad k \rightarrow 0$$

и

$$\tilde{q}(\lambda) = \tilde{g}(-i\lambda; \omega, 1) = e^{-\lambda^\omega} \sim 1 - \lambda^\omega, \quad \lambda \rightarrow 0.$$

Несложные преобразования приводят к следующему уравнению для главной асимптотики

$$\lambda^\omega \tilde{p}^{as}(k, \lambda) = -|k|^\alpha \exp\{-i\alpha\theta\pi/2 \operatorname{sign} k\} \tilde{p}^{as}(k, \lambda) + \lambda^{\omega-1},$$

которое может быть также представлено в виде

$$\lambda^\omega \hat{p}^{as}(x, \lambda) = L^{(\alpha, \beta)} \hat{p}^{as}(x, \lambda) + \lambda^{\omega-1} \delta(x),$$

обобщающем уравнение движения Леви на немарковский тип процесса.

Произведение же $\lambda^\omega \hat{p}^{as}(x, \lambda)$ и функция $\lambda^{\omega-1}$ являются трансформантами Лапласа дробной производной Римана—Лиувилля

$${}_0 D_t^\omega p(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\omega)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{p(x, \tau) d\tau}{(t-\tau)^\omega}$$

и обобщенной функции

$$\frac{t^{-\omega}}{\Gamma(1-\omega)} \delta(x).$$

Таким образом, главная асимптотическая (при $t \rightarrow \infty$) часть распределения $p(x, t)$ удовлетворяют уравнению в частных производных дробного порядка

$${}_0 D_t^\omega p^{as}(x, t) = L^{(\alpha, \beta)} p^{as}(x, t) + \frac{\tau^{-\omega}}{\Gamma(1-\omega)} \delta(x),$$

которое мы будем называть *уравнением аномальной диффузии (АД-уравнением)*.

6. Обобщенный закон Фика

Многомерный аналог АД-уравнения в изотропном случае включает в себя лапласиан дробного порядка:

$${}_0 D_t^\omega f(\mathbf{x}, t) = -K(-\Delta)^{\alpha/2} f(\mathbf{x}, t) + \frac{\tau^{-\omega}}{\Gamma(1-\omega)} \delta(\mathbf{x}).$$

Будучи преобразованным (путем дробного дифференцирования порядка $1 - \omega$ обеих частей) к виду

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -K(-\Delta)^{\alpha/2} {}_0 D_t^{1-\omega} f(\mathbf{x}, t) + \delta(\mathbf{x}) \delta(t),$$

АД-уравнение может быть представлено в виде системы двух уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{j},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = K(-\Delta)^{\alpha/2} {}_0 D_t^{1-\omega} f(\mathbf{x}, t),$$

первое из которых является уравнением непрерывности, определяющим вектор плотности тока вероятности $\mathbf{j}$, а второе — *обобщенным законом Фика*, заданным в неявной форме.

При $\alpha = 2$ и $\omega = 1$ обобщенный закон принимает вид обычного закона Фика

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = -K \Delta f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{j} = -K \operatorname{grad} f(\mathbf{x}, t).$$

При $\alpha = 2$ и $\omega \neq 1$ мы имеем дело с субдиффузионным обобщением:

$$\mathbf{j} = -K \operatorname{grad} {}_0 D_t^{1-\omega} f(\mathbf{x}, t) = -K {}_0 D_t^{1-\omega} \operatorname{grad} f(\mathbf{x}, t).$$

Наличие в правой части производной по времени дробного порядка

$${}_0 D_t^{1-\omega} \operatorname{grad} f(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\Gamma(\omega)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{\operatorname{grad} f(\mathbf{x}, \tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-\omega}}$$

отражает влияние памяти процесса на распространение диффузионного пакета: плотность тока в данный момент определяется не мгновенным градиентом плотности в данный момент, а его эволюцией в течение всего предшествующего периода диффузии. Эта особенность обусловлена наличием в среде случайно распределенных ловушек с распределением времени удержания степенного типа. Замедленная таким образом диффузия называется *субдиффузией* и носит немарковский, но локальный характер.

При $\alpha < 2$ и $\omega = 1$ имеет место ускоренный режим диффузии, называемый *супердиффузией*. В этом режиме

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = K(-\Delta)^{\alpha/2} f(\mathbf{x}, t)$$

и скорость изменения плотности в данной точке определяется не градиентом в ней, а распределением диффундирующей субстанции в большой ее окрестности (влияние больших пробегов с асимптотически степенным характером распределения). Супердиффузия (называемая также диффузией Леви или полетами Леви) — марковский, но нелокальный (поскольку лапласиан в дробной степени является интегральным по пространству оператором). Важно иметь в виду, что не только закон изменения ширины аномального диффузионного пакета, но и сама его форма отличаются от таковых, наблюдаемых в нормальной диффузии.

В случае $\alpha < 2$ и $\omega < 1$ процесс аномальной диффузии является немарковским и нелокальным.

1. Математическая физика. Энциклопедия / Под ред. Л.Д. Фаддеева. М.: Большая Российская энциклопедия. 1998. 692 с.
2. Uchaikin V.V., Zolotarev V.M. Chance and Stability. Utrecht, The Netherlands: VSP, 1999. 570 p.
3. Учайкин В.В. Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы // Успехи физических наук. 2003. Т. 173. №8. С. 847-876.
4. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.

References

1. Faddeev L.D. Matematicheskaya fizika. Entsiklopediya [Mathematical Physics. Encyclopaedia]. Moscow, Bol'shaya Rossiyskaya Entsiklopediya Publ., 1998. 692 p.
2. Uchaikin V.V., Zolotarev V.M. Chance and Stability, VSP, Utrecht, The Netherlands, 1999. 570 p.
3. Uchaikin V.V. Avtomodel'naya anomal'naya diffuziya i ustoychivye zakony [Anomalous self-similar diffusion and Levy-stable laws]. Uspekhi fizicheskikh nauk, 2003, vol. 173, no. 8, pp. 847-876.
4. Uchaikin V.V. Metod drobnnykh proizvodnykh [Method of Fractional Derivatives]. Ul'yanovsk, Artishok Publ., 2008. 512 p.