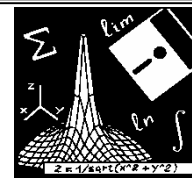


АСТРОФИЗИКА И ЗВЕЗДНАЯ АСТРОНОМИЯ



УДК 531.011:521.11

DOI: [https://doi.org/10.34680/2076-8052.2021.4\(125\).114-116](https://doi.org/10.34680/2076-8052.2021.4(125).114-116)

КОНФОРМНАЯ СИММЕТРИЯ ПРОБЛЕМЫ КЕПЛЕРА

Я.И.Грановский

CONFORMAL SYMMETRY OF KEPLER'S PROBLEM

Ya.I.Granovsky

Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого, yagran1931@gmail.com

В статье показано, что независимо от кинематики динамической группой задачи Кеплера является конформная группа $SL_2(C)$.

Ключевые слова: конформная группа, теорема Гамильтона, уравнение Дирака, геометрия электронных функций

Для цитирования: Грановский Я.И. Конформная симметрия проблемы Кеплера // Вестник НовГУ. Сер.: Технические науки. 2021. №4(125). С.114-116. DOI: [https://doi.org/10.34680/2076-8052.2021.4\(125\).114-116](https://doi.org/10.34680/2076-8052.2021.4(125).114-116)

In this article it is shown that, independently on kinematics, the dynamical group of the Kepler's problem is conformal group $SL_2(C)$.

Keywords: conformal group, the Cayley–Hamilton theorem, Dirac equation, geometry of electronic functions

For citation: Granovsky Ya.I. Conformal symmetry of Kepler's problem // Vestnik NovSU. Issue: Engineering Sciences. 2021. №4(125). P.114-116. DOI: [https://doi.org/10.34680/2076-8052.2021.4\(125\).114-116](https://doi.org/10.34680/2076-8052.2021.4(125).114-116)

Введение

Около 400 лет назад И.Кеплер установил три закона движения планеты вокруг Солнца, а спустя 80 лет И.Ньютон показал, что они вытекают из гипотезы о силе, действующей по закону обратных квадратов. С тех пор задача о движении в поле такой силы называется Проблемой Кеплера.

В XX в. оказалось, что законы движения в мире атомов и молекул, хотя и похожи на канонические уравнения, но имеют совершенно иное содержание: динамические переменные стали операторами, скобки Пуассона — коммутаторами, возникла квантовая механика.

Тем не менее, в этом мире осталось место для проблемы Кеплера — ею стала задача об устройстве атома водорода. Более того, действующая в нём сила, хотя и электрического происхождения, но зависит от расстояния, как и гравитационная — по закону обратных квадратов.

Займёмся же этой задачей!

Теорема гамильтона

В 1847 г. Гамильтон опубликовал короткую заметку, в которой проинтегрировал закон Ньютона $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$. В проблеме Кеплера $\vec{F} = -\frac{\alpha\vec{n}}{r^2}$, ($\alpha = GMm$):

$$\vec{p} = -\alpha \int \vec{n} dt r^{-2} = -\frac{\alpha m}{L} \int \vec{n} d\varphi = Q\vec{e} + \text{const}; \quad Q = \frac{\alpha m}{L},$$

$$\vec{e} = -e_x \sin \varphi + e_y \cos \varphi. \quad (1)$$

В уравнении $\vec{p} - Q\vec{e} = \vec{h}$ содержится вся теория кеплеровского эллипса:

1-й закон («закон орбит»): $\vec{r} \times \vec{p} = \vec{L} = Q\vec{r} \times \vec{e} + \vec{r} \times \vec{h} = Qr\vec{e}_z + rh \cos \varphi \vec{e}_z$, откуда следует уравнение орбиты $r = \rho(1 + \varepsilon \cos \varphi)^{-1}$ при $\rho = L/Q$ и $\varepsilon = h/Q$;

2-й закон («закон площадей»): постоянство секторной скорости $S = r^2 \dot{\varphi}/2$ следует из сохранения орбитального момента $S = L/2m$;

3-й закон («закон расстояний»): $T = \pi ab / S = 2\pi mab / \sqrt{ma\rho} = 2\pi a^{3/2} / \sqrt{GM}$.

Траектория импульса (Гамильтон назвал её *годографом*) представляет собой окружность с радиусом, равным Q , центр которой сдвинут от начала на вектор $\vec{h}$. Эти окружности — большие круги трехмерной сферы, перпендикулярные моменту.

Просто удивительно, как эта простая картина ускользнула от внимания выдающихся математиков XVIII века...

Симметрия

Если представить эллипс Кеплера в параметрическом виде $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$, то видно, что координаты x и y колеблются синхронно, что ведёт к замкнутости орбиты. Совпадение периодов ведёт к целому ряду эффектов: энергия не зависит от эксцентриситета, орбита не меняется при вращениях вокруг момента.

Наличие второго интеграла движения (в нашем случае вектора $\vec{h}$) приводит к ещё одному преобразованию, вращению вокруг него: симметрия повышается от $O(3)$ до $O(4)$. Именно эта симметрия $O(4)$ была установлена В.А.Фоком в 1935 г.

Можно указать ещё одно преобразование — инверсию относительно годографа. Инверсия относится к конформным преобразованиям, значительно расширяющим группу преобразований симметрии. Заметим, что в координатном представлении это преобразование выглядит весьма громоздко (эллипс превращается в гиперболу).

Уравнение Шредингера

Переходя к квантовой теории, мы должны пользоваться волновым уравнением Э.Шредингера $\mathcal{H}\Psi = E\Psi$.

Гамильтониан $\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r}$ имеет тот же вид, что и в классике, но теперь импульс — это оператор $p^2 = -\hbar^2 \nabla^2$ (в дальнейшем будем считать $\hbar = 1$ и полагать $Ze^2 = \alpha$). Оператором является и $\vec{r}$, но в координатном представлении он сводится к простому умножению.

Волновое уравнение вида

$$\left[\frac{1}{r} \partial^2 r - \frac{L^2}{r^2} + \frac{2ma}{r} + 2mE \right] \Psi(\vec{r}) = 0 \quad (2)$$

математики называют уравнением Уиттекера. Стандартным методом его решения является выделение асимптотик в особых точках $r = 0$ и ∞ с последующей интерполяцией между ними.

Мы запишем это уравнение в импульсном представлении

$$r(p^2 + k^2) \Psi(\vec{p}) = 2ma \Psi(\vec{p}), \quad k^2 = -2mE > 0, \quad (3)$$

где импульс p^2 сводится к умножению, а r становится дифференциальным оператором!

Разные авторы обращались с этим уравнением по-разному: Э.Хиллераас квадратовал его, В.А.Фок превращал из дифференциального в интегральное, Ю.Б.Румер изучал алгебраические свойства левой части.

Первое, что сделал Румер, — это ввёл оператор $R_1 = r(p^2 + k^2)/2k$ и кулоновский параметр $\eta = \alpha m/k$: уравнение Шредингера стало уравнением собственных значений этого оператора $R_1 \Psi = \eta \Psi$. Наряду с R_1 он ввёл оператор $R_2 = r(p^2 - k^2)/2k$, соответствующий энергии $E > 0$. Их коммутатор

$$[R_1, R_2] = iR_3 \quad (4)$$

порождает третий оператор, равный $R_3 = -i(r\partial + 1)$. На этом алгебра замыкается — дальнейшие коммутации выражаются через три оператора:

$$[R_1, R_2] = iR_3, \quad [R_2, R_3] = -iR_1, \quad [R_3, R_1] = iR_2. \quad (5)$$

Алгебра этих трёх операторов носит название $O(2,1)$, отражающее её сигнатуру; она отличается от $O(3)$ знаком второго коммутатора (см. Приложение 1).

Как и в $O(3)$, в ней имеется оператор $R_+ = R_2 + iR_3$, который превращает волновую функцию Ψ в Ψ' , также являющуюся собственной функцией оператора R_1 . В самом деле, $R_1 R_+ \Psi - R_+ R_1 \Psi = R_+ \Psi$, т. е. $R_1 \Psi' - R_+ \eta \Psi = \Psi'$ или $R_1 \Psi' = (\eta + 1) \Psi'$.

R_+ называют повышающим оператором; его можно применять повторно, так что возникает «лестница» состояний с арифметически растущим параметром $\eta = \eta_0 + n$. Ограничений на число повторов нет, лестница бесконечна, что отличает некомпактную алгебру Румера от компактной $O(3)$.

Наряду с R_+ существует понижающий оператор $R_- = R_2 - iR_3$, действующий в обратном направлении. Исходя из любого состояния, с помощью этих двух операторов можно восстановить весь спектр дискретных состояний. Все они одинаково зависят от углов и других аргументов (спин, чётность и т.п.), изменяется только радиальная (или импульсная) зависимость, так как кроме неё у операторов $R_{\pm}$ нет других аргументов!

Что касается атома водорода, то его параметр $\eta = \eta_0 + n$ содержит η_0 — кулоновский параметр основного состояния и n — радиальное квантовое число. В нерелятивистском случае $\eta_0 = 1$, и энергия равна

$$E = -\frac{k^2}{2m} = -\frac{1}{2m} \left(\frac{\alpha m}{\eta} \right)^2 = -\frac{m\alpha^2}{2(n+1)^2} \quad \text{— получается известная формула Н.Бора.}$$

Уравнение Дирака

Обратимся к релятивистской теории «магнитного» электрона (П.Дирак, 1928 г.). Его современная запись, с учётом влияния внешнего поля, предложена В.Паули* (см. также Приложение 2):

$$[\gamma_\alpha \Pi_\alpha + m] \Psi = 0. \quad (6)$$

Она включает: γ_α — 4-рядные матрицы Дирака со свойствами $\gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha = 2\delta_{\alpha\beta}$; $\Pi_\alpha = p_\alpha - eA_\alpha$ — комбинация 4-мерного оператора импульса $p_\alpha = -i\partial/\partial x_\alpha$ и 4-мерного потенциала A_α внешнего

электромагнитного поля; $\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ — биспинор, волновая функция электрона.

Уравнение (6) — это два связанных линейных уравнения для двух спиноров φ и χ . Их можно разделить с помощью уравнения

$$[(\gamma \cdot \Pi)^2 - m^2] \Psi = 0. \quad (7)$$

Имеем $(\gamma \cdot \Pi)^2 = \Pi^2 + ie\vec{\sigma}(\vec{H} + \rho_3 \vec{E})$, где $\vec{H}$ и $\vec{E}$ — напряжённости электромагнитного поля. Окончательно уравнение (6) принимает вид

$$[(E - Ze^2/r)^2 - \vec{p}^2 - m^2 - i\rho_3 \vec{\sigma} \vec{n} Ze^2/r^2] \Psi = 0. \quad (8)$$

Подставив $\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{\vec{L}^2}{r^2}$ и разделив на $(-2ik)^2$, приходим к уравнению Уиттекера

$$\left(\partial_\rho^2 - \frac{1}{4} + \frac{i\eta}{\rho} - \frac{\hat{O}}{\rho^2} \right) \rho \Psi(\rho) = 0, \quad (9)$$

в котором $\rho = -2ikr$, $\eta = ZaE/k$, $\hat{O} = \vec{L}^2 - (Z\alpha)^2 + iZ\alpha\rho_3 \vec{\sigma} \vec{n}$.

Нашей целью было получить это уравнение и убедиться, что оно имеет всё тот же вид, что и в нерелятивистской теории. Ниже мы установим его конформную симметрию.

Мы видим в уравнении (8) всё тот же оператор Ю.Румера $R_1 = \rho \partial_\rho^2 - \frac{\rho}{4} - \frac{\gamma(\gamma+1)}{\rho^2}$ с единственной разницей — коэффициент $l(l+1)$ заменён на $\gamma(\gamma+1)$ собственное значение оператора $\hat{O}$ (см. Приложение 3).

Построив операторы R_1 и R_2 , заключаем, что и в релятивистской кинематике алгебра $O(1,2)$ сохраняет

*Здесь и в дальнейшем приняты единицы измерения, в которых $\hbar=c=1$.

силу вместе со своим следствием $\eta = \gamma + n$. Поэтому

$$\text{энергия даётся формулой } E = m \sqrt{1 + \left(\frac{Ze^2}{n + \gamma} \right)^2}.$$

Геометрия электрона

Вернёмся к картине Гамильтона: годограф — это большой круг 3-мерной сферы, погруженной в 4-мерное евклидово пространство. Кривизна этой сферы равна $2/Q^2$. Ввиду изоморфизма такой же кривизной обладает плоскость импульсов; её метрический тензор $g_{ab} = \delta_{ab} \left(\frac{2k}{p^2 + k^2} \right)^2$ пропорционален

δ_{ab} , метрическому тензору плоского пространства. Это означает, что она конформна! Впрочем, мы это видели выше, в разделе «Симметрия».

В квантовой теории геометрия импульсов остаётся той же, но вместо траекторий используется волновая функция. Что вносит в эту картину спин?

Обратимся к уравнению Дирака. Полный угловой момент $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ включает спиновую часть $\vec{S} = \frac{\vec{\sigma}}{2}$.

Согласно правилу сложения моментов $j = l \pm 1/2$, поэтому при данном j необходимо иметь две функции — одну для $l = j + 1/2$, другую — для $l = j - 1/2$. Эту роль выполняют два спинора с противоположными чётностями, верхний φ и нижний χ . Поэтому волновая функция электрона имеет не две компоненты, а четыре.

Наряду с вектором γ_α в теории электрона встречаются тензоры второго $\gamma_\alpha \gamma_\beta$, третьего $\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\delta$ и четвёртого $\gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\delta \gamma_\epsilon$ рангов. Если считать их вместе с вектором, то получится 15 линейно-независимых матриц. Вместе с единичной матрицей они образуют полную систему матриц 4-го порядка. Все шестнадцать можно записать в виде $\rho_a \sigma_b$, откуда легко получить коммутаторы $[O_{ab}, O_{ac}] = ie_a O_{bc}$, отвечающие конформной алгебре $SL_2(\mathbb{C})$.

Остаётся лишь перечислить, в каких ролях выступают эти матрицы: первая из пяти троек $\vec{\sigma}$ — генератор вращений, вторая $\rho_2 \vec{\sigma}$ — генератор «бустов» [вместе они образуют алгебру Фока $O(4)$], третья $\rho_1 \vec{\sigma}$ — генератор сдвигов, четвёртая $\rho_3 \vec{\sigma}$ — генератор инверсий и, наконец, пятая $\vec{\rho}$ — генератор алгебры Румера $O(1,2)$ (см. Приложение 4).

Заключение

Таким образом, волновые функции атома водорода являются представлениями конформной группы. Этот вывод справедлив при любой кинематике. Спектр представляет собой арифметическую прогрессию с единичным шагом $\eta = \eta_0 + n$. Движение по спектру не меняет полный момент, вследствие чего спектр состоит из двух «лестниц» с противоположной чётностью.

Мы приходим к двум выводам:

— волновая функция электрона удовлетворяет уравнению Уиттекера при любой кинематике и любым спине;

— динамической группой Проблемы Кеплера является конформная $SL_2(\mathbb{C})$.

Неудивительно, что, будучи чисто геометрическими, эти свойства сохраняются и в классической механике.

Наконец, следует отметить, что конформная симметрия ограничена классом математических функций, подчиняющихся вырожденному гипергеометрическому уравнению с двумя особыми точками. Гипергеометрическое уравнение с его тремя особыми точками подчиняется квадратичной алгебре и выходит за рамки групп С.Ли.

На сегодняшний день эти положения являются наиболее общим результатом многолетних исследований выдающихся учёных, упоминавшихся выше.

Приложения

1. Алгебра (4) отличается от алгебры 3-мерных вращений $O(3)$ знаком второго коммутатора, что отражается на её операторе Казимира $Q = R_1^2 - R_2^2 - R_3^2$ имеющего в отличие от своего аналога алгебраически неопределённую форму. Оператор R_1 «не похож» на R_2 , и это видно не только в коммутаторах, но и в его спектре — он непрерывен!

Что касается $R_- = R_2 - iR_3$, то он ограничен: дойдя до основного состояния Ψ_0 , он обращает его в ноль $R_- \Psi_0 = 0$, и в результате лестница состояний ограничена снизу!

2. Основываясь на уравнении Шредингера $i\hbar \partial \Psi / \partial t = \mathcal{H} \Psi$ и релятивистском равноправии координат и времени, Дирак полагал гамильтониан линейной комбинацией операторов импульса $\mathcal{H} = \vec{a} \vec{p} + b m$. Поскольку, согласно А.Эйнштейну, $E^2 = p^2 + m^2$, то должно быть $\vec{a}^2 = b^2$ и, сверх того, $\vec{a} b + b \vec{a} = 0$. Эти равенства Дирак удовлетворил с помощью матриц $\vec{a} = \rho_1 \vec{\sigma}$ и $b = \rho_3$. Окончательно волновое уравнение свободно движущегося электрона приняло вид $i\hbar \partial \Psi / \partial t = [\rho_1 \vec{\sigma} \vec{p} + \rho_3 m] \Psi$. Паули восстановил релятивистскую инвариантность, объединив операторы $\partial / \partial x$ и $\partial / \partial t$, и освободив инвариант m от матрицы.

3. Преобразуем матрицу $\hat{O}$. Пусть $\Gamma = \kappa \rho_1 + iZ\alpha \rho_3 \vec{\sigma} \vec{n}$. Тогда $\Gamma^2 = \kappa^2 - (Z\alpha)^2$ и $\hat{O} = \vec{L}^2 - (Z\alpha)^2 + iZ\alpha \rho_3 \vec{\sigma} \vec{n} = \Gamma^2 + \Gamma + [\vec{L}^2 - \kappa^2 - \kappa \rho_1]$. Слагаемые в скобке компенсируются и $\hat{O} = \Gamma(\Gamma + 1)$. Собственное значение Γ равно $\gamma = \sqrt{\kappa^2 - (Z\alpha)^2}$, $\kappa = j + 1/2$.

4. Особая роль алгебры $O(1,2)$ связана с тем, что комплексная плоскость $\zeta = x + iy$, в которой лежит годограф, инвариантна относительно дробно-линейного преобразования $\zeta' = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}$. Матрица

$$\begin{pmatrix} 1 + \alpha & \beta \\ \gamma & 1 - \alpha \end{pmatrix}, \text{ близкая к единичной, порождает преоб-}$$

разования растяжения $\zeta' = \zeta \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}$, сдвига $\zeta' = \zeta + \beta$ и

инверсии $\frac{1}{\zeta'} = \frac{1}{\zeta} + \gamma$. Их генераторы коммутируют как

$$[g_\alpha, g_\beta] = -g_\beta, [g_\alpha, g_\gamma] = g_\gamma, [g_\beta, g_\gamma] = 2g_\alpha, \text{ что позволяет отождествить } g_\alpha \text{ с } R_1, g_\beta \text{ с } R_-, g_\gamma \text{ с } R_+.$$

Таким образом, группа движений комплексной плоскости совпадает с $O(1,2)$.